SUR CERTAINES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES FINIES*

PAR

N. E. NÖRLUND

I.

1. Pour abréger nous désignerons la différence du premier ordre avec l'intervalle ω par le symbole $\underset{\omega}{\triangle}$

$$\underset{\omega}{\triangle} F(x) = \frac{F(x+\omega)-F(x)}{\omega},$$

et la moyenne entre les valeurs d'une fonction dans les points x et $x+\omega$ par le symbole $\underset{\omega}{\nabla}$

$$\underset{\omega}{\nabla} F(x) = \frac{F(x+\omega)+F(x)}{2}.$$

Soient $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des nombres positifs quelconques. Je définis la différence d'ordre n par l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1\ldots\omega_n}{\triangle}} F(x) = \underset{\omega_n}{\triangle}\left(\overset{n-1}{\underset{\omega_1\ldots\omega_{n-1}}{\triangle}} F(x)\right)$$

et la moyenne d'ordre n par l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1\ldots\omega_n}{\nabla}} F(x) = \underset{\omega_n}{\nabla}\left(\overset{n-1}{\underset{\omega_1\ldots\omega_{n-1}}{\nabla}} F(x)\right).$$

En particulier, si $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = \omega$, j'écris plus brièvement $\overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} F(x)$ et $\overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}} F(x)$. On a donc

$$\omega^n \overset{n}{\underset{\omega}{\triangle}} F(x) = \sum_{s=0}^{s=n}(-1)^{n-s}\binom{n}{s}F(x+s\omega),$$

$$2^n \overset{n}{\underset{\omega}{\nabla}} F(x) = \sum_{s=0}^{s=n}\binom{n}{s}F(x+s\omega).$$

* Presented to the Society, April 28, 1923.

Dans ce mémoire je vais étudier les solutions des deux équations suivantes

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\triangle}} F(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla}} G(x) = \varphi(x), \tag{2}$$

$\varphi(x)$ étant une fonction donnée qui, pour $x \geqq a$, admet une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre m, telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^{n+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0,$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut. Ces deux équations admettent évidemment une infinité de solutions. Parmi elles j'en distingue une que j'appelle la *solution principale* et je me borne à étudier cette solution particulière. On obtient la solution la plus générale en ajoutant à la solution principale une fonction quelconque $\pi(x)$ qui satisfait à l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\triangle}} \pi(x) = 0,$$

respectivement à l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla}} \pi(x) = 0.$$

Posons pour abréger

$$\Omega = s_1 \omega_1 + s_2 \omega_2 + \cdots + s_n \omega_n$$

et considérons la série à n entrées

$$2^n \sum (-1)^{s_1 + s_2 \cdots + s_n} \varphi(x + \Omega) e^{-\eta(x+\Omega)}, \tag{3}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières, non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Cette série converge* évidemment pour toute valeur positive de η et nous allons démontrer que la somme de la série tend uniformément vers une limite quand le nombre positif η tend vers zéro. Cette limite représente, pour $x \geqq a$, une fonction continue de x, soit $G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$,

* En effet, la condition que nous avons imposée à la fonction $\varphi(x)$ entraîne qu'on sait trouver un nombre positif p tel que $\lim_{x \to \infty} \frac{\varphi(x)}{x^p} = 0$.

et l'on vérifie sans peine que cette fonction satisfait à l'équation (2). On aura donc

$$(4)\quad G_n(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \lim_{\eta \to 0} 2^n \sum (-1)^{s_1+s_2\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)}$$

et cette solution sera par définition la solution principale de l'équation (2). D'une manière semblable je définis la solution principale de l'équation (1) que je désignerais par $F_n(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. En donnant à n successivement les valeurs $1, 2, 3, \ldots,$ on obtient ainsi deux suites de transcendantes nouvelles: $F_1, F_2, F_3, \ldots$ d'une part et $G_1, G_2, G_3, \ldots$ d'autre part. Le but de ce mémoire est de mettre en évidence les propriétés les plus importantes de ces transcendantes en les considérant comme des fonctions de x et de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. J'ai déjà consacré un mémoire* étendu à l'étude du cas $n = 1$ et j'ai fait récemment un historique† complet de la théorie des équations aux différences finies. En renvoyant le lecteur à cet historique je me borne à mentionner ici qu'un cas particulier de l'équation (1) a été étudié par Barnes.‡

Sur une formule sommatoire

2. Dans ce qui suit nous ferons souvent usage de certaines séries multiples. Précisons d'abord ce que nous voulons entendre par une série convergente. Considérons la série à n entrées

$$(5)\quad \sum \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n),$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Cette série est convergente si la somme

$$(6)\quad \sum_{s_n=0}^{s_n=p_n} \cdots \sum_{s_2=0}^{s_2=p_2} \sum_{s_1=0}^{s_1=p_1} \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

* *Mémoire sur le calcul aux différences finies,* Acta Mathematica, vol. 44 (1923), pp. 71–211.

† *Sur l'état actuel de la théorie des équations aux différences finies,* Bulletin des Sciences Mathématiques, sér. 2, vol. 44 (1920), pp. 172-192, pp. 200–220; *Neuere Untersuchungen über Differenzengleichungen, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften,* II C 7 (1923).

‡ E. W. Barnes, *Genesis of the double Gamma Functions,* Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 31 (1900), pp. 358–381; *The theory of the double Gamma Function,* Royal Society Philosophical Transactions, vol. 196 A (1901), pp. 265–387; *On the theory of the multiple Gamma Function,* Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 19 (1904), pp. 374–425. Voir aussi G. H. Hardy, *On the expression of the double Zeta-function and double Gamma-function in terms of elliptic functions,* Transactions of the Cambridge Philosophical Society, vol. 20 (1905), pp. 1–35.

tend vers une limite quand les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tendent simultanément, mais indépendamment l'un de l'autre, vers l'infini, et cette limite s'appelle la somme de la série. De même considérons l'intégrale

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_n,$$

φ étant continue pour les valeurs positives des variables. Cette intégrale est convergente si l'intégrale

$$\int_0^{p_n} dt_n \ldots \int_0^{p_2} dt_2 \int_0^{p_1} \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1$$

tend vers une limite quand $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tendent vers l'infini simultanément, mais indépendamment l'un de l'autre. Plusieurs auteurs* ont adopté une autre définition qui est telle que toute série (intégrale) multiple, qui converge, est absolument convergente. Il n'y a pas lieu de s'imposer cette restriction.† Les séries (intégrales) qui convergent, sans être absolument convergentes, peuvent rendre des services considérables en analyse et il n'y a aucune raison pour ne pas en tirer parti.

Si dans l'expression (6) on fait tendre d'abord p_1, puis $p_2, \ldots$ et enfin p_n vers l'infini, on obtient la série n fois itérée

$$\sum_{s_n=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} \varphi(s_1, s_2, \ldots, s_n).$$

Il convient de remarquer que cette série est essentiellement distincte de la série (5), la convergence de l'une n'entraîne pas nécessairement la convergence de l'autre.

Dans le but de démontrer que l'expression (3) tend vers une limite quand $\eta \to 0$, je commence par déduire une certaine formule sommatoire qui pourra d'ailleurs aussi rendre des services quand il s'agira d'étudier si une série multiple converge ou non.

---

* Voir par exemple Jordan, *Cours d'Analyse*, 2[e] édition, vol. 1, p. 302; vol. 2, p. 78.

† Cf. les remarques de Pringsheim, Münchener Sitzungsberichte, vol. 27 (1897), pp. 139–141, et de Hardy, Messenger of Mathematics, ser. 2, vol. 32 (1903), pp. 92–97.

Soit $E_\nu(x)$ le polynome d'Euler* c'est-à-dire le polynome qui satisfait à l'équation

$$E_\nu(x+1)+E_\nu(x)=2x^\nu.$$

Soit $\bar{E}_\nu(x)$ une fonction qui satisfait à l'équation

$$\bar{E}_\nu(x+1)+\bar{E}_\nu(x)=0$$

et qui est égale au polynome $E_\nu(x)$ dans l'intervalle $0 \leqq x < 1$. Soit $\varphi(z)$ une fonction qui admet une dérivée d'ordre m qui est absolument continue dans l'intervalle $x \leqq z \leqq x+1$.

On aura†

$$(7)\quad \varphi(x+h)=\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{E_\nu(h)}{\nu!}\nabla\varphi^{(\nu)}(x)-\tfrac{1}{2}\int_0^1\frac{\bar{E}_m(h+t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+1-t)\,dt,$$

h étant un nombre tel que $0 \leqq h \leqq 1$. C'est ce qu'on voit aisément en intégrant par partie dans le dernier terme au second membre.

Plus généralement soit $E_\nu^{(n)}(x)$ le polynome d'Euler d'ordre n, c'est-à-dire le polynome qui satisfait à l'équation

$$(8)\qquad \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} E_\nu^{(n)}(x)=x^\nu.$$

Soit $\varphi(x)$ un polynome quelconque du degré m. On a alors la relation identique‡

$$\varphi(x+h)=\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}\varphi^{(\nu)}(x),$$

h étant un nombre quelconque. Quelle pourra être la différence entre le premier et le second membre de cette équation si la fonction $\varphi(x)$ cesse d'être

---

* Au sujet des polynomes d'Euler et des polynomes de Bernoulli voir: *Mémoire sur les polynomes de Bernoulli*, Acta Mathematica, vol. 43 (1920), pp. 121-196. Dans les pages suivantes nous nous servirons souvent des résultats obtenus dans ce mémoire.

† *Mémoire sur le calcul aux différences finies*, Acta Mathematica, vol. 44 (1923), p. 88. L'équation (7) a été indiquée, sans terme reste, par Euler dans le cas particulier $h=0$. Elle a été retrouvée par Oettinger (*Die Lehre von den aufsteigenden Functionen*, 1836, p. 44) et plus tard par Boole et on la désigne quelquefois comme la formule sommatoire de Boole.

‡ Acta Mathematica, vol. 43, p. 156.

un polynome? Pour le voir je définis, de la manière suivante, une fonction que je désigne par $\bar{E}_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ ou plus brièvement par $\bar{E}_\nu^{(n)}(x)$. Cette fonction doit satisfaire à l'équation

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\nabla}} \bar{E}_\nu^{(n)}(x) = 0 \tag{9}$$

et l'on a en outre dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$

$$\bar{E}_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n) = E_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n).$$

La fonction est uniquement définie, pour toutes les valeurs réelles de x, par les deux conditions que nous venons de lui imposer. Elle est continue à l'intérieur de l'intervalle $0 < x < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. Si $\nu > 0$ elle est encore continue dans le point $x = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. En effet, la fonction est définie dans ce point par l'équation (9), où l'on pose $x = 0$. Mais comme le second membre de l'équation (8) tend vers zéro avec x notre fonction prend la même valeur que le polynome d'Euler dans le point en question. Elle est par conséquent continue dans ce point. Cela posé considérons l'équation (9) et faisons varier x en partant du point $x = 0$. On obtient successivement, pour toutes les valeurs réelles de x, la valeur de la fonction $\bar{E}_\nu^{(n)}(x)$ comme une somme de $2^n - 1$ fonctions continues. Notre fonction est par conséquent continue partout, si $\nu > 0$. Mais cela n'est plus vrai si $\nu = 0$ parce que le second membre de l'équation (8) se réduit à *un*. Il en résulte que la fonction $\bar{E}_0^{(n)}(x)$ est discontinue dans le point $x = 0$ et par conséquent dans une infinité d'autres points que nous énumérons plus loin.

Nous allons indiquer quelques propriétés importantes de la fonction $\bar{E}_\nu^{(n)}(x)$. On aura

$$\bar{E}_\nu^{(n)}(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n - x) = (-1)^\nu \bar{E}_\nu^{(n)}(x), \qquad (\nu > 0). \tag{10}$$

Car des propriétés du polynome d'Euler* il résulte que cette relation est vraie dans l'intervalle $0 \leqq x \leqq \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. En outre la moyenne $n^{\text{ième}}$ de la fonction au premier membre est égale à zéro. C'est ce qu'on voit en remplaçant x par $-x$ dans l'équation (9). La relation (10) subsiste donc pour toutes les valeurs réelles de x. On voit de même que

$$\frac{d\bar{E}_\nu^{(n)}(x)}{dx} = \nu \bar{E}_{\nu-1}^{(n)}(x), \qquad (\nu > 0). \tag{11}$$

* **Acta Mathematica**, vol. 43, p. 157.

Car cette relation est vraie dans l'intervalle $0 < x < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$ et les deux membres ont leur moyenne $n^{\text{ième}}$ égale à zéro. Elle est donc vraie partout. Si $\nu = 0$ la dérivée cesse d'exister dans une infinité de points. $\overline{E}_\nu^{(n)}(x)$ est donc, si $\nu > 0$, une fonction continue de x qui admet des dérivées continues des ordres $1, 2, \ldots, \nu - 1$. Elle admet en outre une dérivée d'ordre ν qui est discontinue dans une infinité de points.

La fonction $\overline{E}(x)$ satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_n}{\nabla} \overline{E}_\nu^{(n)}(x) = \overline{E}_\nu^{(n-1)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}). \tag{12}$$

Car des propriétés du polynome d'Euler il résulte que cette équation est vraie dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_{n-1}$. Et, par définition, les moyennes $(n-1)^{\text{ièmes}}$ des fonctions au premier et au second membres de l'équation (12) sont nul. Ces deux fonctions sont donc égales pour toutes les valeurs de x.

Considérons en particulier le cas $\nu = 0$. La fonction $\overline{E}_0^{(1)}(x \mid \omega_1)$ est définie par les conditions

$$\overline{E}_0^{(1)}(x + \omega_1) = -\overline{E}_0^{(1)}(x),$$
$$\overline{E}_0^{(1)}(x) = 1, \qquad (0 \leqq x < \omega_1).$$

Elle est égale à $+1$ ou à -1. Elle est donc continue sauf dans les points $x = 0, \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \ldots$ où elle passe de ± 1 à ∓ 1.

Considérons la fonction $\overline{E}_0^{(2)}(x \mid \omega_1, \omega_2)$. Par définition elle est continue dans l'intervalle $0 < x < \omega_1 + \omega_2$ et l'on aura

$$\overline{E}_0^{(2)}(x + \omega_2) + \overline{E}_0^{(2)}(x) = 2\,\overline{E}_0^{(1)}(x \mid \omega_1).$$

Il en résulte que notre fonction est discontinue dans les points $p_1\omega_1 + p_2\omega_2$, p_1 et p_2 étant des entiers positifs, et elle y fait un saut brusque égal à $4(-1)^{p_1+p_2+1}$. En général, elle est continue dans les points $p_1\omega_1$ et dans les points $p_2\omega_2$. De plus notre fonction est discontinue dans les points $-p_1\omega_1 - p_2\omega_2$, p_1 et p_2 étant des entiers non négatifs, et elle y fait un saut brusque égal à $4(-1)^{p_1+p_2}$. Dans tout autre point la fonction est continue.

Par voie d'induction on démontre que la fonction $\overline{E}_0^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)$, qui est égale à *un* dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$, est discontinue dans les points $p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \cdots + p_n\omega_n$ de telle manière que

$$\overline{E}_0^{(n)}(p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \cdots + p_n\omega_n + 0) - \overline{E}_0^{(n)}(p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \cdots + p_n\omega_n - 0)$$
$$= 2^n(-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_n+n-1},$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers positifs. Et elle est discontinue dans les points $-p_1\omega_1 - p_2\omega_2 - \cdots - p_n\omega_n$ de telle manière que

$$\overline{E}_0^{(n)}(-p_1\omega_1 - p_2\omega_2 - \cdots - p_n\omega_n + 0) - \overline{E}_0^{(n)}(-p_1\omega_1 - p_2\omega_2 - \cdots - p_n\omega_n - 0)$$
$$= 2^n(-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers non négatifs. Dans tout autre point la fonction est continue et elle est constante dans tout intervalle limité par deux points de discontinuité consécutifs.

S'il arrive que q des points susdits viennent coïncider dans un point nous comptons ce point comme un point de discontinuité q^{iple} et dans un tel point le saut est q fois plus grand que dans un point simple.

Ce fait se présente en particulier si tous les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ se réduisent à *un*. En ce cas on sait trouver une expression bien simple de notre fonction. Je dis qu'on a

$$(13)\quad \overline{E}_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{2^n}{n!}\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^{n-s}}{s!}\overline{E}_{\nu+s}(x)\,D_x^s(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

En effet, en appliquant l'opération ∇ aux deux membres de l'équation (13) il vient

$$\nabla\ \overline{E}_\nu^{(n+1)}(x) = \overline{E}_\nu^{(n)}(x).$$

D'autre part, des propriétés des polynomes d'Euler* il résulte que l'équation (13) est vraie dans l'intervalle $0 \leqq x < 1$. Par voie d'induction on démontre alors qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de x.

De cette équation il résulte en particulier que

$$\overline{E}_0^{(n+1)}(x) = \frac{(-2)^n}{n!}(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\,\overline{E}_0(x) + f(x),$$

$f(x)$ étant une fonction continue de x. On voit donc que la fonction $\overline{E}_0^{(n)}(x)$ est discontinue dans les points $x = n, n+1, n+2, \ldots$ et dans les points $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$ et il n'y a pas d'autres points de discontinuité. Si p est un entier positif, nul ou négatif on aura

$$\overline{E}_0^{(n)}(p+0) - \overline{E}_0^{(n)}(p-0) = (-1)^{p+n-1}2^n\frac{(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}$$

* **Acta Mathematica**, vol. 43, p. 188.

Ce résultat est en accord avec celui que nous venons de trouver dans le cas général.

Comment se comporte la fonction $\overline{E}_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ quand $|x|$ tend vers l'infini? Si les ω_i satisfont à certaines conditions cette fonction reste comprise entre des limites finies. Je me borne à indiquer une limite supérieure du module de la fonction, valable quels que soient les ω_i. On a d'abord

$$(-1)^{p_2}\,\overline{E}_\nu^{(2)}(x+p_2\,\omega_2) = \overline{E}_\nu^{(2)}(x) - 2\sum_{s=0}^{p_2-1}(-1)^s\,\overline{E}_\nu^{(1)}(x+s\,\omega_2\,|\,\omega_1).$$

Comme $\overline{E}_\nu^{(1)}(x)$ est périodique et bornée on en conclut que

$$\frac{\overline{E}_\nu^{(2)}(x\,|\,\omega_1, \omega_2)}{x}$$

reste comprise entre des limites finies quand $|x|$ tend vers l'infini. En tenant compte de l'équation (12) on démontre par voie d'induction que

$$\frac{\overline{E}_\nu^{(n)}(x\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n)}{x^{n-1}}$$

reste comprise entre des limites finies quand $|x|$ tend vers l'infini. Il arrive que cette expression tend vers zéro mais ce n'est pas toujours le cas. Par exemple si tous les ω_i se réduisent à *un* l'équation (13) montre que $\overline{E}_\nu^{(n)}(x)$ est de la forme

$$\frac{\overline{E}_\nu^{(n)}(x)}{x^{n-1}} = \pi(x) + \varepsilon(x),$$

$\pi(x)$ étant une fonction périodique et bornée, qui n'est pas identiquement zéro, $\varepsilon(x)$ étant une fonction qui tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

3. Cela posé, soit $\varphi(z)$ une fonction qui admet une dérivée continue d'ordre $m+1$ dans l'intervalle $x \leqq z \leqq x + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$, et considérons l'intégrale

$$(14) \qquad Q_m^{(n)} = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\omega_n} \frac{\overline{E}_m^{(n)}(h+t)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}^{n-1} \varphi^{(m+1)}(x+\omega_n - t)\,dt,$$

h étant un nombre situé dans l'intervalle $0 \leqq h < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. En intégrant par partie on trouve, si $m > 0$,

$$Q_m^{(n)} = Q_{m-1}^{(n)} + \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h+\omega_n)}{2 \cdot m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}^{n-1} \varphi^{(m)}(x) - \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h)}{2 \cdot m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}^{n-1} \varphi^{(m)}(x+\omega_n),$$

mais cette relation peut s'écrire

$$(15)\quad Q_m^{(n)} = Q_{m-1}^{(n)} - \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x) + \frac{\bar{E}_m^{(n-1)}(h)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}^{n-1} \varphi^{(m)}(x).$$

Si $n = 1$ le dernier terme au second membre se reduit à zéro parce que $\bar{E}_m^{(1)}(h+\omega_1) + \bar{E}_m^{(1)}(h) = 0$. Posons

$$(16)\qquad R_m^{(n)}(x) = Q_m^{(n)} + Q_m^{(n-1)} + \cdots + Q_m^{(1)}.$$

On aura en vertu de l'équation (15)

$$R_m^{(n)}(x) = R_{m-1}^{(n)}(x) - \frac{E_m^{(n)}(h)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x).$$

Par conséquent

$$(17)\qquad R_m^{(n)}(x) = R_0^{(n)}(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x).$$

Il nous reste à évaluer $R_0^{(n)}(x)$. Dans ce but considérons l'intégrale $Q_0^{(n)}$ et supposons pour un moment que $0 \leqq h < \omega_1$. Si $n > 1$, la fonction $\bar{E}_0^{(n)}(h+t)$ est constante et égale à 1 dans l'intervalle d'intégration. On trouve par conséquent

$$(18)\qquad Q_0^{(n)} = \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_{n-1}}^{n-1} \varphi(x) - \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi(x).$$

Mais cette équation n'est plus vraie si $n = 1$. La fonction $\bar{E}_0^{(1)}(h+t)$ est en effet discontinue dans le point $t = \omega_1 - h$ qui est situe dans l'intervalle d'intégration. En tenant compte de ce fait on trouve

$$(19)\qquad Q_0^{(1)} = -\mathop{\nabla}_{\omega_1} \varphi(x) + \varphi(x+h).$$

De ces équations on déduit la valeur de $R_0^{(n)}(x)$:

$$(20)\quad R_0^{(n)}(x) = Q_0^{(n)} + Q_0^{(n-1)} + \cdots + Q_0^{(1)} = -\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi(x) + \varphi(x+h).$$

Nous venons de supposer que h est situé dans l'intervalle $0 \leqq h < \omega_1$. Si h croît et sort de cet intervalle, les relations (18) et (19) cessent d'être vraies. Les fonctions $\overline{E}_0^{(2)}(h+t), \ldots, \overline{E}_0^{(n)}(h+t)$ deviennent en effet discontinues dans un nombre fini de points situés dans les intervalles d'intégration. Mais en se reportant à ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent on vérifie sans peine que les termes qui proviennent de ces discontinuités se détruisent mutuellement de sorte que l'équation (20) reste vraie pourvu que $0 \leqq h < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$.

Substituons maintenant l'expression (20) dans l'équation (17). On trouve la formule que j'avais en vue

$$(21)\qquad \varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x) + R_m^{(n)}(x),$$

où $0 \leqq h < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. Soit en particulier $h = 0$, il vient*

$$(22)\qquad \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{C_\nu^{(n)}}{\nu!\,2^\nu} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x) + R_m^{(n)}(x),$$

où

$$(23)\quad R_m^{(n)}(x) = -\tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n} \int_0^{\omega_p} \frac{\overline{E}_m^{(p)}(t)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+\omega_p-t)\,dt.$$

Mais si l'on pose $h = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n)$ on trouve

$$(24)\quad \varphi\left(x + \frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right) = \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{E_{2\nu}^{(n)}}{(2\nu)!\,2^{2\nu}} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(2\nu)}(x) + R_{2m}^{(n)}(x),$$

* Nous avons supposé que les ω_i sont des nombres positifs parce que la fonction $\overline{E}(x\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n)$ n'est définie qu'en ce cas. Mais dans l'équation (22) la fonction $\overline{E}(x)$ a été remplacée par le polynome d'Euler et l'on n'a plus besoin de faire cette hypothèse. La démonstration que nous venons de donner de l'équation (22) reste valable quand on donne aux variables $x, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ des valeurs complexes quelconques pourvu que la dérivée $\varphi^{(m+1)}(x)$ reste continue pour les valeurs qui entrent en considération.

où

(25)
$$R_{2m}^{(n)}(x) = -\tfrac{1}{2}\sum_{p=1}^{p=n}\int_0^{\omega_p}\frac{\bar{E}_{2m}^{(p)}\left(t+\frac{\omega_1+\cdots+\omega_n}{2}\right)}{(2m)!}\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1}\varphi^{(2m+1)}(x+\omega_p-t)\,dt.$$

4. Le premier terme au second membre de l'équation (21) est une fonction symétrique des paramètres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; il faut donc qu'il en soit de même du reste, mais l'expression de $R_m^{(n)}(x)$ que nous venons de trouver est apparemment asymétrique et pour cette raison peu commode dans certaines applications. On peut écrire le reste sous une autre forme qui est quelquefois préférable mais on doit alors faire une nouvelle hypothèse relativement à la fonction φ. Supposons que la dérivée $\varphi^{(m+1)}(z)$ est continue, pour $z \geqq x$, et que l'intégrale

(26)
$$\int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(-t)\,\varphi^{(m+1)}(z+t)\,dt$$

converge.* Dans ces conditions je dis qu'on a

(27)
$$R_m^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!}\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

De la convergence de l'intégrale (26) il résulte d'abord que toutes les intégrales

$$\int_0^\infty \bar{E}_m^{(p)}(-t)\,\varphi^{(m+1)}(z+t)\,dt \qquad (p=1,2,\ldots,n)$$

convergent pour $z \geqq x$. Si $n=1$ l'équation (16) se réduit à

$$R_m^{(1)}(x) = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\omega_1}\frac{\bar{E}_m^{(1)}(h+\omega_1-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Mais puisque

$$\mathop{\nabla}_{\omega_1}\bar{E}_m^{(1)}(x) = 0,$$

* Cette intégrale est en particulier absolument convergente si $\lim_{x\to\infty} x^{n+\varepsilon}\varphi^{(m+1)}(x) = 0$, ε étant un nombre positif.

cette équation peut s'écrire comme il suit:

$$R_m^{(1)}(x) = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\omega_1} \frac{\bar{E}_m^{(1)}(h+\omega_1-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\bar{E}_m^{(1)}(h+\omega_1-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\bar{E}_m^{(1)}(h-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

On aura donc

$$R_m^{(1)}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{E}_m^{(1)}(h-t)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

L'équation (27) est par conséquent vraie si $n=1$. Supposons que cette équation est vraie si $n=p-1$. Nous avons vu que

$$R_m^{(p)}(x) = Q_m^{(p)} + R_m^{(p-1)}(x).$$

On a donc

$$R_m^{(p)}(x) = -\tfrac{1}{2}\int_0^{\omega_p} \frac{\bar{E}_m^{(p)}(h+\omega_p-t)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$
$$+\int_0^{\infty} \frac{\bar{E}_m^{(p-1)}(h-t)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Mais puisque

$$\mathop{\nabla}_{\omega_p} \bar{E}_m^{(p)}(x) = \bar{E}_m^{(p-1)}(x),$$

on en déduit

$$R_m^{(p)}(x) = \tfrac{1}{2}\int_{\omega_p}^{\infty} \frac{\bar{E}_m^{(p)}(h-t+\omega_p)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$
$$+\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{\bar{E}_m^{(p)}(h-t)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Il en résulte que

$$R_m^{(p)}(x) = \int_0^\infty \frac{\overline{E}_m^{(p)}(h-t)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_p}^{p} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt, \text{ c. q. f. d.}$$

5. Je vais donner une seconde démonstration de la formule fondamentale (21). Cette démonstration est plus simple que celle qui précède mais elle est en revanche moins générale. Je suppose maintenant que la fonction $\varphi(x)$ et ses dérivées des $m+1$ premiers ordres satisfont aux égalités

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+\varepsilon}\varphi^{(\nu)}(x) = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m+1)$$

ε étant un nombre positif. Supposons comme plus haut que

$$0 \leqq h < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$$

et considérons l'intégrale (27) qui évidemment a un sens. En intégrant par partie on trouve

$$R_m^{(n)}(x) = R_{m-1}^{(n)}(x) - \frac{E_m^{(n)}(h)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x).$$

En répétant cette opération m fois il vient

$$R_m^{(n)}(x) = R_0^{(n)}(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x). \tag{28}$$

Il nous reste à évaluer l'intégrale

$$R_0^{(n)}(x) = \int_0^\infty \overline{E}_0^{(n)}(h-t) \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi'(x+t)\,dt.$$

La fonction $\overline{E}_0^{(n)}(h-t)$ est discontinue dans les points $t = h + s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n$, où les s_i sont des entiers non négatifs, et elle n'admet pas d'autres points de discontinuité dans l'intervalle d'intégration. Elle est d'ailleurs égale à une constante dans tout intervalle qui ne renferme pas de point de discontinuité. En tenant compte de ce que nous avons dit des discontinuités dans le paragraphe 2 on voit que cette intégrale est égale à

$$(29)\qquad R_0^{(n)}(x) = -\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi(x) + 2^n\sum(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi(x+h+\Omega)$$

où l'on a posé

$$\Omega = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n.$$

Dans cette série la sommation est étendue à toutes les valeurs entières, non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. La série est évidemment absolument convergente parce que

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+\varepsilon}\varphi(x) = 0.$$

Pour trouver sa valeur remarquons qu'on a

$$\sum_{s_1=0}^{s_1=p_1-1}\sum_{s_2=0}^{s_2=p_2-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{s_n=p_n-1}(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi(x+\Omega) = \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{p_1\omega_1,\ldots,p_n\omega_n}\varphi(x),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers positifs impairs quelconques. En faisant tendre ces entiers vers l'infini il vient

$$\sum(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi(x+\Omega) = 2^{-n}\varphi(x).$$

L'équation (29) se réduit par conséquent à

$$R_0^{(n)}(x) = -\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi(x) + \varphi(x+h).$$

En substituant cette expression dans l'équation (28) on trouve la relation suivante

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty\frac{\overline{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!}\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

6. Cette formule peut nous donner une règle de convergence qui n'est pas sans intérêt. Considérons la série à n entrées

$$(30)\qquad \sum(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}\varphi(x+\Omega),$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières, non négatives de $s_1, s_2, \dots, s_n$. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ tend vers zéro quand x augmente indéfiniment et qu'elle admet, pour $x \geqq a$, une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre m, telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^{n+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0, \qquad (\varepsilon > 0). \tag{31}$$

Je vais démontrer que la série (30) converge uniformément pour $x \geqq a$. En effet, soit h un nombre tel que $0 \leqq h < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. Nous avons vu qu'on a

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \dots \omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(h-t)}{(m-1)!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \dots \omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x+t)\, dt.$$

On en déduit la relation suivante

$$\sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1\ 1} (-1)^{s_1+s_2+\dots+s_n} \varphi(x+h+\Omega) \tag{32}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\nabla}_{p_1\omega_1, \dots, p_n\omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(h-t)}{(m-1)!} \mathop{\nabla}_{p_1\omega_1, \dots, p_n\omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x+t)\, dt,$$

$p_1, p_2, \dots, p_n$ étant des entiers positifs impairs quelconques. Si un ou plusieurs des nombres p_i sont pairs on trouve une relation analogue, mais un peu plus compliquée, que nous nous dispenserons de reproduire. Il s'agit de démontrer que le second membre de l'équation (32) tend vers une limite quand tous les p_i tendent vers l'infini indépendamment l'un de l'autre. L'intégrale au second membre peut se décomposer en une somme de 2^n intégrales dont l'une est égale à

$$2^{-n} \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(h-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\, dt, \tag{33}$$

pendant que les autres sont de la forme

$$P = 2^{-n} \int_0^\infty \frac{\overline{E}_{m-1}^{(n)}(h-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+p+t)\, dt, \tag{34}$$

p étant un nombre qui tend vers l'infini quand tous les entiers p_i tendent vers l'infini. On aura, pour $t > 0$,

$$\left|\bar{E}_{m-1}^{(n)}(h-t)\right| < Ct^{n-1},$$

C étant une constante. Il résulte donc de l'équation (31) qu'on sait trouver une constante C_1 telle que

$$|P| < C_1 \int_0^\infty \frac{t^{n-1}\,dt}{(x+p+t)^{n+\varepsilon}} < C_1 \int_0^\infty \frac{dt}{(x+p+t)^{1+\varepsilon}} = \frac{C_1}{\varepsilon}\,\frac{1}{(x+p)^\varepsilon}.$$

ε étant positif on conclut de cette inégalité que les intégrales (34) tendent uniformément vers zéro. L'intégrale au second membre de l'équation (32) tend donc uniformément vers l'intégrale (33) quand les p_i augmentent indéfiniment.

Cela posé, rappelons le théorème suivant, dû à Hardy et Littlewood*: Si la fonction $f(x)$ tend vers zéro, quand $x \to \infty$, et admet une dérivée d'ordre m, qui est continue et bornée, alors les dérivées d'ordres inférieurs à m tendent nécessairement vers zéro quand $x \to \infty$.

De nos hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$ il résulte donc que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(\nu)}(x) = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m).$$

Le premier terme au second membre de l'équation (32) tend donc uniformément vers une limite quand les p_i augmentent indéfiniment. La série (30) est par conséquent uniformément convergente et l'on aura

$$2^n \sum (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega)$$
$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x-h) + \int_{-h}^{\infty} \frac{\bar{E}_{m-1}^{(n)}(-t)}{(m-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.$$

On voit ainsi que la série (30) converge par exemple dans le cas suivant

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^\beta (\log x)^\gamma}, \qquad \Re(\beta) > 0,$$

et cela quel que soit γ. Mais si $\Re(\beta) = 0$, la série converge pourvu que $\Re(\gamma) > 0$.

*Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, vol. 9 (1911), pp. 437–438; ser. 2, vol. 11 (1913), pp. 422–423.

Dans une série multiple on peut effectuer la sommation d'une infinité de manières. Nous avons choisi celle qui est la plus naturelle, mais il convient de remarquer que, si l'on adopte une autre méthode de sommation, les conditions de convergence changent entièrement à moins que la série ne converge absolument. Considérons par exemple la série (30) et supposons pour un moment que tous les nombres ω_i se réduisent à 1. Il paraît naturel de transformer la série en une série simple de la manière suivante. On a évidemment

$$\sum_{s_1+s_2+\cdots+s_n\leq p}(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}\varphi(x+s_1+s_2+\cdots+s_n)$$
$$=\sum_{s=0}^{s=p}\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}(-1)^s\varphi(x+s).$$

Dans le premier membre la sommation est étendue à toutes les valeurs entières, non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$ qui vérifient l'inégalité $s_1+s_2+\cdots+s_n\leq p$. Faisons tendre l'entier p vers l'infini. Il vient

$$\sum_{s_1,\ldots,s_n=0,1,2\ldots}(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}\varphi(x+s_1+s_2+\cdots+s_n)$$
$$=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(s+1)(s+2)\cdots(s+n-1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}(-1)^s\varphi(x+s),$$

pourvu que la série au premier membre soit absolument convergente. Mais s'il n'en est pas ainsi cette égalité n'a pas lieu, en général. Soit par exemple

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^\beta}.$$

Nous venons de voir que la série multiple au premier membre converge, si $\beta>0$. Mais pour que la série simple au second membre converge il faut que $\beta>n-1$. On peut aussi transformer la série (30) en une série n fois itérée. Admettons comme plus haut que les ω_i soient des nombres positifs quelconques. Reprenons l'équation (32) et faisons tendre d'abord p_1, puis $p_2,\ldots$ et enfin p_n vers l'infini. Le second membre tend vers une limite et vers la même limite que dans le cas où ces nombres tendent simultanément vers l'infini. La série n fois itérée

$$\sum_{s_n=0}^{\infty}\left(\cdots\sum_{s_2=0}^{\infty}\left(\sum_{s_1=0}^{\infty}(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}\varphi(x+\Omega)\right)\right)$$

est donc convergente, si $\varphi(x)$ satisfait aux conditions énumérées au commencement de ce paragraphe, et cette série a la même somme que la série multiple (30).

7. Les polynomes d'Euler figurent comme coefficients dans la série suivante*:

$$\frac{e^{-h\eta}\,2^n}{(e^{-\eta\omega_1}+1)(e^{-\eta\omega_2}+1)\dots(e^{-\eta\omega_n}+1)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}(-\eta)^\nu.$$

Si l'on arrête la série au second membre à un certain terme on peut trouver une expression bien simple du terme complémentaire. En effet, posons dans l'équation (21)

$$\varphi(x)=e^{-\eta x},$$

η étant un nombre positif. On aura

$$\mathop{\nabla}_{\omega_1\dots\omega_n}^{n}\varphi^{(\nu)}(x)=2^{-n}(-\eta)^\nu e^{-\eta x}(e^{-\omega_1\eta}+1)(e^{-\omega_2\eta}+1)\cdots(e^{-\omega_n\eta}+1).$$

En substituant ces expressions dans l'équation (21) on trouvera

$$\frac{e^{-\eta h}\,2^n}{(e^{-\omega_1\eta}+1)\,(e^{-\omega_2\eta}+1)\cdots(e^{-\omega_n\eta}+1)}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}(-\eta)^\nu+(-\eta)^{m+1}\int_0^\infty\frac{\overline{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!}e^{-\eta t}\,dt.$$

De cette relation on peut déduire un lemme qui nous sera utile plus loin. En développant le premier membre suivant les puissances de η on obtient

$$\int_0^\infty\frac{\overline{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!}e^{-\eta t}\,dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{E_{\nu+m+1}^{(n)}(h)}{(\nu+m+1)!}(-\eta)^\nu.$$

Dérivons p fois par rapport à η, il vient

$$\int_0^\infty\frac{\overline{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!}t^p\,e^{-\eta t}\,dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{E_{\nu+m+p+1}^{(n)}(h)}{(\nu+m+p+1)!}\,\frac{(\nu+p)!}{\nu!}(-\eta)^\nu.$$

* Acta Mathematica, vol. 43, p. 184.

L'intégrale au premier membre converge pour $\eta > 0$ et diverge pour $\eta = 0$. Elle représente, pour $\eta > 0$, une fonction analytique de η qui est holomorphe dans le point $\eta = 0$. L'intégrale tend donc vers une limite quand le nombre positif η tend vers zéro et l'on trouve

$$\lim_{\eta \to 0} \int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\, t^p e^{-\eta t}\, dt = \frac{m!\,p!}{(m+p+1)!} E_{m+p+1}^{(n)}(h).$$

La solution principale $G_n(x)$

8. Ces préliminaires posés je vais démontrer l'existence de la fonction $G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ définie par l'équation (4). Soit $\varphi(x)$ une fonction qui, pour $x \geqq a$, admet une dérivée continue d'un certain ordre, soit d'ordre $m+1$, telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^{n+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0, \tag{35}$$

ε étant un nombre positif. Considérons la série (3). Cette série converge pour toute valeur positive de η car de l'hypothèse que nous venons de faire il résulte qu'on sait trouver une constante c telle que

$$|\varphi^{(\nu)}(x)| < cx^m, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m), \tag{36}$$

quelque grand que soit x. Cette inégalité est en particulier vraie pour $\nu = 0$. La série (3) converge donc uniformément quand x reste dans un intervalle fini quelconque $a \leqq x \leqq b$. Faisons tendre le nombre positif η vers zéro. Je veux démontrer que l'expression (3) tend uniformément vers une limite que je désigne par $G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Reprenons la relation

$$f(x+h) = \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} f^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!} \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} f^{(m+1)}(x+t)\, dt.$$

Soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des entiers positifs impairs quelconques. Remplaçons x par $x+\Omega$ et donnons aux s_i les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p_i-1$. En ajoutant ensemble toutes les équations ainsi obtenues on trouvera

$$\sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} f(x+h+\Omega) \tag{37}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\nabla}_{p_1\omega_1, \ldots, p_n\omega_n}^{n} f^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!} \mathop{\nabla}_{p_1\omega_1, \ldots, p_n\omega_n}^{n} f^{(m+1)}(x+t)\, dt.$$

Posons $f(x) = \varphi(x)\, e^{-\eta x}$ et faisons tendre les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vers l'infini. Il vient

$$(38) \qquad 2^n \sum (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+h+\Omega)\, e^{-\eta(x+h+\Omega)}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} D_x^\nu [\varphi(x)\, e^{-\eta x}] + \int_0^\infty \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!} D_x^{m+1} [\varphi(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}]\, dt.$$

On le voit aisément en tenant compte de l'inégalité (36). En effet le premier terme au second membre de l'équation (37) est composé d'un nombre fini de termes de la forme

$$C\, \varphi^{(\nu)}(x+\Omega)\, e^{-\eta(x+\Omega)},$$

C étant une constante. Et ces termes tendent vers zéro quand Ω augmente indéfiniment. L'intégrale au second membre de l'équation (37) peut se décomposer en un nombre fini de termes de la forme

$$Q = C \int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\, \varphi^{(\nu)}(x+\Omega+t)\, e^{-\eta(x+\Omega+t)}\, dt.$$

Mais on aura

$$|Q| < C_1 \int_0^\infty t^{n-1} (x+\Omega+t)^m\, e^{-\eta(x+\Omega+t)}\, dt < C_1 \int_{x+\Omega}^\infty t^{m+n-1}\, e^{-\eta t}\, dt$$

et la dernière intégrale tend vers zéro quand Ω tend vers l'infini, η étant un nombre positif fixe. Cela posé, faisons tendre η vers zéro dans l'équation (38). On trouvera

$$(39) \quad G_n(x+h) = \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt.$$

En effet on aura

$$\lim_{\eta \to 0} \int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\, \varphi^{(m+1)}(x+t)\, e^{-\eta(x+t)}\, dt = \int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\, \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt$$

et cela uniformément dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$ parce que l'intégrale au second membre est convergente. Posons

$$P_\nu = \eta^\nu \int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\, \varphi^{(m+1-\nu)}(x+t)\, e^{-\eta(x+t)} dt.$$

L'équation (39) est établie si l'on peut démontrer que

$$\lim_{\eta \to 0} P_\nu = 0, \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots, m+1).$$

Il résulte de l'équation (35) que les dérivées de $\varphi(x)$ sont de la forme

$$\varphi^{(m+1-\nu)}(x) = \psi_\nu(x) + p_\nu(x), \quad (\nu = 1.2, \ldots, m+1),$$

$p_\nu(x)$ étant un polynome de degré $\nu - 1$ et $\psi_\nu(x)$ étant une fonction continue de x telle que

$$\lim_{x \to \infty} x^{n+\epsilon-\nu} \psi_\nu(x) = 0,$$

ϵ étant un nombre positif. On a donc

$$P_\nu = \eta^\nu \int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\, \psi_\nu(x+t)\, e^{-\eta(x+t)} dt + \eta^\nu \int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\, p_\nu(x+t)\, e^{-\eta(x+t)} dt.$$

Dans le paragraphe 7 nous avons démontré que l'intégrale

$$\int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\, t^p\, e^{-\eta t} dt$$

tend vers une limite finie quand η tend vers zéro. Comme $p_\nu(x)$ est un polynome le dernier terme au second membre tendra uniformément vers zéro quand η tend vers zéro. Considérons l'autre terme. On sait trouver une constante C telle que

$$\left|\eta^\nu \int_0^\infty \bar{E}_m^{(n)}(h-t)\,\psi_\nu(x+t)\,e^{-\eta(x+t)}\,dt\right|$$

$$< C\eta^\nu \int_x^\infty t^{n-1}\,t^{\nu-n-\varepsilon}\,e^{-\eta t}\,dt < C\eta^\varepsilon \int_0^\infty t^{\nu-1-\varepsilon}\,e^{-t}\,dt.$$

De cette inégalité on conclut que P_ν tend uniformément vers zéro avec η. Nous avons ainsi démontré que le second membre de l'équation (4) tend vers une limite uniformément dans l'intervalle $a \leqq x \leqq b$. Cette limite est donc une fonction continue de x qui admet un développement de la forme (39). On vérifie immédiatement que la fonction $G_n(x)$ est une solution de l'équation (2). En effet en appliquant l'opération $\underset{\omega_n}{\nabla}$ aux deux membres de l'équation (4) on trouvera

$$\underset{\omega_n}{\nabla} G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$$

$$= \lim_{\eta \to 0} 2^{n-1} \sum (-1)^{s_1+\cdots+s_{n-1}} \varphi(x+s_1\omega_1+\cdots+s_{n-1}\omega_{n-1})\, e^{-\eta(x+s_1\omega_1+\cdots+s_{n-1}\omega_{n-1})},$$

c'est-à-dire que

$$\underset{\omega_n}{\nabla} G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = G_{n-1}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}).$$

On en conclut que

$$\overset{2}{\underset{\omega_n \omega_{n-1}}{\nabla}} G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = G_{n-2}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-2}),$$

. . . .

$$\overset{n-1}{\underset{\omega_2 \ldots \omega_n}{\nabla}} G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = G_1(x \mid \omega_1),$$

et puisque

$$\underset{\omega_1}{\nabla} G_1(x \mid \omega_1) = \varphi(x)$$

on trouvera enfin

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\nabla}} G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \varphi(x).$$

II.

Extension de la formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin

9. Je vais maintenant établir une certaine identité qui nous sera utile dans l'étude des solutions de l'équation (1). Soit $B_\nu(x)$ le polynome de Bernoulli, c'est-à-dire le polynome qui satisfait à l'équation

$$B_\nu(x+1)-B_\nu(x)=\nu x^{\nu-1}$$

Soit $\bar{B}_\nu(x)$ une fonction périodique avec la période *un* qui, dans l'intervalle $0 \leqq x < 1$, est égale au polynome de Bernoulli $B_\nu(x)$. Soit h un nombre tel que $0 \leq h < 1$. La formule sommatoire d'Euler et de Maclaurin peut s'écrire comme il suit

$$\varphi(x+h)=\int_x^{x+1}\varphi(t)\,dt+\sum_{\nu=1}^{\nu=m}\frac{B_\nu(h)}{\nu!}\,\triangle\,\varphi^{(\nu-1)}(x)+R_m \tag{1}$$

où

$$R_m=-\int_0^1\frac{\bar{B}_m(h+t)}{m!}\,\varphi^{(m)}(x+1-t)\,dt. \tag{2}$$

On sait que cette relation est très utile quand il s'agit d'évaluer certaines séries à entrée simple. Je vais déduire une relation analogue mais plus générale qui peut servir à évaluer certaines séries multiples. Soit $B_\nu^{(n)}(x)$ le polynome de Bernoulli d'ordre n, on aura*

$$\varphi^{(n)}(x+h)=\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}\varphi^{(\nu)}(x),$$

$\varphi(x)$ étant un polynome quelconque du degré $m+n$ et $\varphi^{(\nu)}(x)$ étant sa dérivée d'ordre ν. En changeant un peu les notations cette identité peut s'écrire

$$\varphi(x+h)=\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\int_0^1 dt_1\int_0^1 dt_2\cdots\int_0^1\varphi^{(\nu)}(x+\omega_1t_1+\omega_2t_2+\cdots+\omega_nt_n)\,dt_n.$$

* **Acta Mathematica**, vol. 43, p. 163.

Il va sans dire que ces équations cessent d'être vraies si la fonction $\varphi(x)$ n'est pas un polynome. Et si l'on faisait tendre m vers l'infini on trouvera dans la plupart des cas une série divergente. Mais je vais démontrer que le terme complémentaire de cette série s'exprime aisément par les dérivées de $\varphi(x)$ sous une forme analogue à l'expression (2).

Dans ce but je définis une fonction $\bar{B}_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)$ comme la solution de l'équation

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\triangle}} \bar{B}_\nu^{(n)}(x) = 0 \tag{3}$$

qui, dans l'intervalle $0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$, est égale au polynome de Bernoulli $B_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)$:

$$\bar{B}_\nu^{(n)}(x) = B_\nu^{(n)}(x), \qquad (0 \leqq x < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n). \tag{4}$$

D'abord la fonction est uniquement définie, pour toutes les valeurs réelles de x par les deux conditions que nous venons de lui imposer. Nous distinguerons trois cas suivant que $\nu \gtreqless n$. Si $\nu < n$ la fonction se réduit au polynome de Bernoulli car ce polynome satisfait à l'équation (3). En ce cas l'équation (4) subsiste donc pour toutes les valeurs de x. Si $\nu > n$ on voit d'abord que notre fonction est continue dans le point $x = \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. En effet elle est définie dans ce point par l'équation (3), où l'on pose $x = 0$. Le polynome de Bernoulli satisfait à l'équation

$$\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\triangle}} B_\nu^{(n)}(x) = \nu(\nu - 1) \cdots (\nu - n + 1) x^{\nu - n} \tag{5}$$

et le second membre de cette équation tend vers zéro avec x. Notre fonction prend donc la même valeur que le polynome de Bernoulli dans le point en question. Elle est par conséquent continue. Cela posé, faisons varier x, dans l'équation (3), en partant du point $x = 0$. On obtient successivement, pour toutes les valeurs réelles de x, la valeur de la fonction $\bar{B}_\nu^{(n)}(x)$ comme une somme de $2^n - 1$ fonctions continues. Notre fonction est par conséquent continue partout si $\nu > n$. Mais cela n'est plus vrai si $\nu = n$ parce que le second membre de l'équation (5) se réduit à $n!$. Il en résulte que la fonction $\bar{B}_n^{(n)}(x)$ est discontinue dans le point $x = 0$ et par conséquent dans une infinité d'autres points que nous énumérons plus loin.

Des propriétés du polynome de Bernoulli il résulte que la fonction $\bar{B}_\nu^{(n)}(x)$ satisfait aux trois relations suivantes

$$\overline{B}_\nu^{(n)}(\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n-x)=(-1)^\nu\,\overline{B}_\nu^{(n)}(x), \qquad (\nu \gtrless n), \tag{6}$$

$$\underset{\omega_n}{\triangle}\,\overline{B}_\nu^{(n)}(x)=\nu\,\overline{B}_{\nu-1}^{(n-1)}(x\mid\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_{n-1}), \tag{7}$$

$$\frac{d\overline{B}_\nu^{(n)}(x)}{dx}=\nu\,\overline{B}_{\nu-1}^{(n)}(x), \qquad (\nu \gtrless n). \tag{8}$$

On le démontre par un raisonnement presque identique à celui du paragraphe 2. Par exemple, la dernière équation est par définition vraie dans l'intervalle $0<x<\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n$ et les deux membres ont leur différence $n^{\text{ième}}$ égale à nul. Elle est donc vraie pour toutes les valeurs de x. Si $\nu=n$ la dérivée cesse d'exister dans une infinité de points. $\overline{B}_\nu^{(n)}(x)$ est donc, si $\nu>n$, une fonction continue de x qui admet des dérivées continues des ordres $1,2,\ldots,\nu-n-1$. Elle admet en outre une dérivée d'ordre $\nu-n$ qui est discontinue dans une infinité de points.

Considérons en particulier le cas $\nu=n$. La fonction $\overline{B}_1^{(1)}(x\mid\omega_1)$ est périodique avec la période ω_1. Elle est toujours continue, excepté pour les valeurs de x de la forme $p\omega_1$ où elle fait un saut brusque égal à $-\omega_1$, c'est-à-dire qu'on a

$$\overline{B}_1^{(1)}(p\omega_1+0)-\overline{B}_1^{(1)}(p\omega_1-0)=-\omega_1,$$

p étant un entier positif, négatif ou nul.

Cela posé, considérons la fonction $\overline{B}_2^{(2)}(x\mid\omega_1,\omega_2)$. Elle est, par définition, continue dans l'intervalle $0<x<\omega_1+\omega_2$ et l'on aura

$$\overline{B}_2^{(2)}(x+\omega_2)-\overline{B}_2^{(2)}(x)=2\,\omega_2\overline{B}_1^{(1)}(x\mid\omega_1).$$

Il en résulte que la fonction $\overline{B}_2^{(2)}(x)$ est discontinue dans les points $p_1\omega_1+p_2\omega_2$, p_1 et p_2 étant des entiers positifs, et elle y fait un saut brusque égal à $-2\omega_1\omega_2$. En général, elle est continue dans les points $p_1\omega_1$ et dans les points $p_2\omega_2$. De plus la fonction est discontinue dans les points $-p_1\omega_1-p_2\omega_2$, p_1 et p_2 étant des entiers non négatifs, et elle y fait un saut brusque égal à $2\omega_1\omega_2$. Dans tout autre point la fonction est continue.

A l'aide le la relation

$$\overline{B}_n^{(n)}(x+\omega_n)-\overline{B}_n^{(n)}(x)=n\,\omega_n\,\overline{B}_{n-1}^{(n-1)}(x)$$

on démontre par voie d'induction que la fonction $\bar{B}_n^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ est discontinue dans les points $p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \cdots + p_n\omega_n$ de telle manière que

$$\bar{B}_n^{(n)}(p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \cdots + p_n\omega_n + 0) - \bar{B}_n^{(n)}(p_1\omega_1 + p_2\omega_2 + \cdots + p_n\omega_n - 0)$$
$$= -n!\,\omega_1\omega_2\cdots\omega_n,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers positifs. Et elle est discontinue dans les points $-p_1\omega_1 - p_2\omega_2 - \cdots - p_n\omega_n$ de telle manière que

$$\bar{B}_n^{(n)}(-p_1\omega_1 - p_2\omega_2 - \cdots - p_n\omega_n + 0) - \bar{B}_n^{(n)}(-p_1\omega_1 - p_2\omega_2 - \cdots - p_n\omega_n - 0)$$
$$= (-1)^n n!\,\omega_1\omega_2\cdots\omega_n,$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers non négatifs. Dans tout autre point la fonction est continue.

S'il arrive que q des points susdits viennent coïncider dans un point nous comptons ce point comme un point de discontinuité q^{iple} et dans un tel point le saut est q fois plus grand que dans un point simple.

Considérons en particulier le cas où tous les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ se réduisent à *un*. En ce cas on peut donner une expression remarquable de notre fonction. Je dis qu'on a

$$(9)\quad \bar{B}_\nu^{(n+1)}(x) = \frac{\nu!}{n!(\nu-n-1)!}\sum_{s=0}^{s=\nu}\frac{(-1)^s}{s!}\,\frac{\bar{B}_{\nu-n+s}(x)}{\nu-n+s}\,D_x^s(x-1)(x-2)\cdots(x-n).$$

En effet, en appliquant l'opération $\triangle$ aux deux membres de cette équation il vient

$$\triangle\,\bar{B}_\nu^{(n+1)}(x) = \nu\,\bar{B}_{\nu-1}^{(n)}(x).$$

D'autre part des propriétés des polynomes de Bernoulli* il résulte que l'équation (9) est vraie dans l'intervalle $0 \leqq x < 1$. Par voie d'induction on démontre alors qu'elle est vraie pour toutes les valeurs de x.

De l'équation (9) il résulte en particulier que

$$\bar{B}_n^{(n)}(x) = n(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)\,\bar{B}_1(x) + f(x),$$

* Acta Mathematica, vol. 43, p. 188.

$f(x)$ étant une fonction continue. On voit donc que la fonction $\bar{B}_n^{(n)}(x)$ est discontinue dans les points $x = n, n+1, n+2, \ldots$ et dans les points $x = 0, -1, -2, -3, \ldots$ et il n'y a pas d'autres points de discontinuité. Si p est un entier positif, nul ou négatif on aura

$$\bar{B}_n^{(n)}(p+0) - \bar{B}_n^{(n)}(p-0) = -n(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1).$$

Ce résultat est en accord avec celui que nous venons de trouver dans le cas général.

Il est facile de trouver une limite supérieure du module de la fonction $\bar{B}_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. Si $n = 1$ la fonction est périodique et bornée. Si $n = 2$ on aura

$$\bar{B}_\nu^{(2)}(x + p\,\omega_2) = \bar{B}_\nu^{(2)}(x) + \omega_2\,\nu \sum_{s=0}^{p-1} \bar{B}_{\nu-1}^{(1)}(x + s\,\omega_2 \mid \omega_1).$$

La fonction

$$\frac{\bar{B}_\nu^{(2)}(x)}{x}$$

reste donc comprise entre des limites finies quand $|x|$ tend vers l'infini. Par voie d'induction on démontre qu'on sait trouver une constante positive K telle que

$$|\bar{B}_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)| < K|x|^{n-1}$$

quelque grand que soit $|x|$. On peut vérifier l'exactitude de ce résultat sur l'équation (9). Il résulte, en effet, de cette équation que $\bar{B}_\nu^{(n)}(x)$ est de la forme

$$\frac{\bar{B}_\nu^{(n)}(x)}{x^{n-1}} = \pi(x) + \varepsilon(x),$$

$\pi(x)$ étant une fonction périodique et bornée, qui n'est pas identiquement zéro, $\varepsilon(x)$ étant une fonction qui tend vers zéro quand $|x|$ tend vers l'infini.

10. Cela posé, soient m et n deux entiers positifs et supposons que la fonction $\varphi(z)$ admet une dérivée continue d'ordre $m+1$ dans l'intervalle $x \leq z \leq x + \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. Considérons l'intégrale

$$(10)\qquad Q^{(n)}_{m+1} = -\frac{1}{\omega_n}\int_0^{\omega_n} \frac{\overline{B}^{(n)}_{m+n}(h+t)}{(m+n)!} \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_{n-1}}^{n-1} \varphi^{(m+1)}(x+\omega_n-t)\,dt,$$

h étant un nombre tel que

$$(11)\qquad 0 \leqq h < \omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n.$$

En intégrant par partie on trouve

$$Q^{(n)}_{m+1} = Q^{(n)}_m + \frac{1}{\omega_n}\frac{\overline{B}^{(n)}_{m+n}(h+\omega_n)}{(m+n)!} \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_{n-1}}^{n-1} \varphi^{(m)}(x)$$

$$-\frac{1}{\omega_n}\frac{\overline{B}^{(n)}_{m+n}(h)}{(m+n)!} \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_{n-1}}^{n-1} \varphi^{(m)}(x+\omega_n).$$

Mais en tenant compte des propriétés de la fonction $\overline{B}(x)$ on peut écrire cette relation comme il suit:

$$(12)\quad Q^{(n)}_{m+1} = Q^{(n)}_m - \frac{\overline{B}^{(n)}_{m+n}(h)}{(m+n)!} \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x) + \frac{\overline{B}^{(n-1)}_{m+n-1}(h)}{(m+n-1)!} \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_{n-1}}^{n-1} \varphi^{(m)}(x).$$

Si $n=1$ le dernier terme au second membre s'annule parce que

$$\overline{B}^{(1)}_m(h+\omega_1) = \overline{B}^{(1)}_m(h).$$

Je dis maintenant que le terme complémentaire de la formule que j'ai en vue est de la forme

$$(13)\qquad R^{(n)}_m(x) = Q^{(n)}_m + Q^{(n-1)}_m + \cdots + Q^{(1)}_m.$$

En effet, de l'équation (12) on déduit d'abord que

$$(14)\qquad R^{(n)}_{m+1}(x) = R^{(n)}_m(x) - \frac{B^{(n)}_{m+n}(h)}{(m+n)!} \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x).$$

Par conséquent on aura

$$(15) \qquad R_{m+1}^{(n)}(x) = R_1^{(n)}(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!} \mathop{\Delta}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x).$$

Il nous reste à évaluer $R_1^{(n)}(x)$. Dans ce but supposons pour un moment que $0 \leqq h < \omega_1$. L'équation (12) est encore vraie si $m = 0$ et $n > 1$. Mais ce n'est plus le cas, si $m = 0$ et $n = 1$, car la fonction $\bar{B}_1^{(1)}(h + t)$ est discontinue dans le point $t = \omega_1 - h$ qui est situé dans l'intervalle d'intégration. En tenant compte de ce fait on trouve au lieu de (12) l'équation suivante

$$(16) \qquad Q_1^{(1)} = Q_0^{(1)} - B_1^{(1)}(h) \mathop{\Delta}_{\omega_1} \varphi(x) + \varphi(x+h).$$

Par conséquent, si $m = 0$, l'équation (14) doit être remplacée pa la suivante

$$(17) \qquad R_1^{(n)}(x) = R_0^{(n)}(x) - \frac{B_n^{(n)}(h)}{n!} \mathop{\Delta}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi(x) + \varphi(x+h).$$

Nous venons de supposer que $0 \leqq h < \omega_1$. Faisons maintenant croître h mais de sorte qu'il reste toujours dans l'intervalle (11). Alors les fonctions $\bar{B}_s^{(s)}(h + t)$ $(s = 1, 2, \ldots, n)$ deviennent discontinues dans un nombre fini de points situés dans les intervalles d'intégration. Il en résulte qu'on doit modifier les équations (12) et (16), si $m = 0$. Dans les seconds membres de ces équations il surgit un nombre fini de termes provenant de ces discontinuités. Mais en se reportant à ce que nous avons dit dans le paragraphe précédent on vérifie sans trop de peine que ces termes se détruisent mutuellement de sorte que l'équation (17) reste vraie quel que soit h dans l'intervalle (11). En intégrant n fois par partie dans l'expression $R_0^{(n)}(x)$ on trouvera enfin

$$R_0^{(n)}(x) = -\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \int_0^1 dt_1 \int_0^1 dt_2 \cdots \int_0^1 \varphi^{(\nu)}(x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n)\, dt_n.$$

En rapprochant cette équation aux équations (17) et (15) on obtiendra la relation suivante

$$(18)\quad \varphi(x+h)=\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\int_0^1 dt_1\int_0^1 dt_2\cdots\int_0^1 \varphi^{(\nu)}(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_n t_n)\,dt_n$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!}\underset{\omega_1\ldots\omega_n}{\overset{n}{\triangle}}\varphi^{(\nu)}(x)+R_{m+1}^{(n)}(x),$$

où l'on a posé

$$(19)\quad R_{m+1}^{(n)}(x)=-\sum_{p=1}^{p=n}\frac{1}{\omega_p}\int_0^{\omega_p}\frac{\bar{B}_{m+p}^{(p)}(h+t)}{(m+p)!}\underset{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}{\overset{p-1}{\triangle}}\varphi^{(m+1)}(x+\omega_p-t)\,dt.$$

C'est la formule que j'avais en vue; pour $n=1$ elle se réduit à la formule sommatoire d'Euler. Si l'on fait tendre h vers zéro et si l'on remplace en même temps $\varphi(x)$ par $f^{(n)}(x)$ notre relation prend la forme*

$$(20)\quad f^{(n)}(x)=\sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\frac{B_\nu^{(n)}}{\nu!}\underset{\omega_1\ldots\omega_p}{\overset{n}{\triangle}}f^{(\nu)}(x)$$

$$-\sum_{p=0}^{p=n-1}\frac{1}{\omega_{p+1}}\int_0^{\omega_{p+1}}\frac{B_{m-n+p}^{(p+1)}(t)}{(m-n+p)!}\underset{\omega_1\ldots\omega_p}{\overset{p}{\triangle}}f^{(m)}(x+\omega_{p+1}-t)\,dt,$$

m étant un entier plus grand que n.

11. Chaque terme dans le développement (18) est une fonction symétrique de $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, le terme complémentaire sera donc aussi une fonction symétrique de ces variables mais cette propriété n'apparaît pas dans l'expression (19). Je vais donner une seconde expression du reste où la symétrie est mise en évidence. Posons

$$P_{m+1}^{(n)}(z)=-\int_0^z\frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(h+z-t)}{(m+n)!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

* Nous avons supposé que les ω_i étaient des nombres positifs. Mais on peut ici faire la même remarque que dans la note de page 17. L'équation (20) reste vraie si les ω_i sont des nombres complexes quelconques et la démonstration précédente s'applique sans modification.

En intégrant par partie on trouvera

$$P_{m+1}^{(n)}(z) = P_m^{(n)}(z) - \frac{B_{m+n}^{(n)}(h)}{(m+n)!}\varphi^{(m)}(x+z) + \frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(h+z)}{(m+n)!}\varphi^{(m)}(x).$$

Appliquons aux deux membres de cette équation l'opération $\overset{n}{\triangle}$ où $\triangle$ porte sur la variable z. Il vient

$$\mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1\ldots\omega_n} P_{m+1}^{(n)}(z) = \mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1\ldots\omega_n} P_m^{(n)}(z) - \frac{B_{m+n}^{(n)}(h)}{(m+n)!}\mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi^{(m)}(x+z).$$

En faisant tendre z vers zéro et en raisonnant comme plus haut, on voit que le terme complémentaire de la série (18) peut s'écrire sous la forme

$$R_m^{(n)}(x) = \left[\mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1\ldots\omega_n} P_m^{(n)}(z)\right]_{z=0} \tag{21}$$

où l'on a posé $z=0$ dans la différence d'ordre n.

Dans certaines applications de la série (18) il paraît plus avantageux de se servir d'une d'autre expression du terme complémentaire; mais cette expression demande une nouvelle hypothèse relativement à la fonction $\varphi(z)$. Admettons que la dérivée $\varphi^{(m+1)}(z)$ est continue pour $z \geqq x$, et que l'intégrale

$$\int_0^\infty \bar{B}_{m+n}^{(n)}(-t)\,\varphi^{(m+1)}(z+t)\,dt \tag{22}$$

converge.* Dans ces conditions on aura

$$R_{m+1}^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!}\mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1\ldots\omega_n}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt. \tag{23}$$

* L'intégrale (22) est en particulier absolument convergente si l'on a

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+\epsilon}\varphi^{(m+1)}(x) = 0, \qquad \epsilon > 0.$$

On le démontre aisément par voie d'induction. En effet de la convergence de l'intégrale (22) il résulte d'abord que toutes les intégrales

$$\int_0^\infty \overline{B}^{(p)}_{m+p}(-t)\,\varphi^{(m+1)}(z+t)\,dt, \qquad (p=1,2,\ldots,n)$$

convergent. Si $n=1$ l'équation (19) se réduit à

$$R^{(1)}_{m+1}(x) = -\frac{1}{\omega_1}\int_0^{\omega_1} \frac{\overline{B}^{(1)}_{m+1}(h+\omega_1-t)}{(m+1)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Mais comme la fonction $\overline{B}^{(1)}_{m+1}(x)$ admet la période ω_1 cette équation peut s'écrire:

$$R^{(1)}_{m+1}(x) = -\frac{1}{\omega_1}\int_0^{\omega_1} \frac{\overline{B}^{(1)}_{m+1}(h+\omega_1-t)}{(m+1)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

$$+\frac{1}{\omega_1}\int_0^{\infty} \frac{\overline{B}^{(1)}_{m+1}(h+\omega_1-t)-\overline{B}^{(1)}_{m+1}(h-t)}{(m+1)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Par conséquent

$$R^{(1)}_{m+1}(x) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^{\infty} \frac{\overline{B}^{(1)}_{m+1}(h-t)}{(m+1)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+\omega_1+t)\,dt$$

$$-\frac{1}{\omega_1}\int_0^{\infty} \frac{\overline{B}^{(1)}_{m+1}(h-t)}{(m+1)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{\overline{B}^{(1)}_{m+1}(h-t)}{(m+1)!}\,\mathop{\triangle}_{\omega_1}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

L'équation (23) est donc vraie si $n=1$. Supposons que l'équation (23) soit vraie si $n=p-1$. De la formule (19) il résulte que

$$R^{(p)}_{m+1}(x) = R^{(p-1)}_{m+1}(x) + Q^{(p)}_{m+1}.$$

On aura donc

$$R_{m+1}^{(p)}(x) = \int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+p-1}^{(p-1)}(h-t)}{(m+p-1)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

$$- \frac{1}{\omega_p}\int_0^{\omega_p} \frac{\bar{B}_{m+p}^{(p)}(h+\omega_p-t)}{(m+p)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Dans la première intégrale je remplace $\bar{B}_{m+p-1}^{(p-1)}(x)$ par

$$\frac{\bar{B}_{m+p}^{(p)}(x+\omega_p) - \bar{B}_{m+p}^{(p)}(x)}{\omega_p(m+p)}.$$

Il vient

$$R_{m+1}^{(p)}(x) = \frac{1}{\omega_p}\int_{\omega_p}^\infty \frac{\bar{B}_{m+p}^{(p)}(h+\omega_p-t)}{(m+p)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt$$

$$- \frac{1}{\omega_p}\int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+p}^{(p)}(h-t)}{(m+p)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_{p-1}}^{p-1} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Il en résulte que

$$R_{m+1}^{(p)}(x) = \int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+p}^{(p)}(h-t)}{(m+p)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_p}^{p} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt, \qquad \text{c.q.f.d.}$$

12. Je vais donner une autre démonstration de l'équation (18) qui est plus directe que celle qui précède mais qui demande des hypothèses nouvelles. Je suppose que la fonction $\varphi(x)$ tend vers zéro quand x croît indéfiniment et que ses dérivées tendent vers zéro de telle manière que

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+\varepsilon} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x) = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m+1),$$

ε étant un nombre positif aussi petit que l'on veut.

Partons de l'intégrale (23) et soit comme plus haut $0 \leqq h < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$. En intégrant par partie on trouve

$$R_{m+1}^{(n)}(x) = R_m^{(n)}(x) - \frac{B_{m+n}^{(n)}(h)}{(m+n)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x).$$

Dans cette équation remplaçons m successivement par $m, m-1, m-2, \ldots, 1$ et ajoutons ensemble les équations ainsi obtenues. Il vient

$$R_{m+1}^{(n)}(x) = R_1^{(n)}(x) - \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x). \tag{24}$$

Considérons l'intégrale

$$R_1^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{\overline{B}_n^{(n)}(h-t)}{n!} \mathop{\triangle}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi'(x+t)\, dt.$$

La fonction sous le signe est discontinue dans les points $t = h + s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \ldots + s_n\omega_n$, où les s_i sont des entiers non négatifs. Elle est continue dans tout autre point situé dans l'intervalle d'intégration. En tenant compte de ce que nous avons dit dans le paragraphe 9 relativement aux discontinuités on trouve, en intégrant par partie

$$\int_0^{\mu+h} \frac{\overline{B}_n^{(n)}(h-t)}{n!} \mathop{\triangle}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi'(x+t)\, dt = \int_0^{\mu+h} \frac{B_{n-1}^{(n)}(h-t)}{(n-1)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi(x+t)\, dt$$

$$- \frac{B_n^{(n)}(h)}{n!} \mathop{\triangle}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi(x) + \frac{\overline{B}_n^{(n)}(-\mu)}{n!} \mathop{\triangle}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi(x+h+\mu) + P(\mu)$$

où

$$P(\mu) = (-1)^n \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \sum \mathop{\triangle}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi(x + h + s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n),$$

la sommation étant etendue à toutes les valeurs entières non négatives des s_i qui vérifient l'inégalité

$$s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n < \mu.$$

Faisons tendre μ vers l'infini. Le troisième terme au second membre tend vers zéro. Il vient donc

$$(25)\quad R_1^{(n)}(x) = R_0^{(n)}(x) - \frac{B_n^{(n)}(h)}{n!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi(x) + (-1)^n \omega_1\omega_2\cdots\omega_n \sum \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi(x+h+\Omega)$$

où l'on a posé

$$\Omega = s_1\omega_1 + s_2\omega_2 + \cdots + s_n\omega_n.$$

Dans la dernière série la sommation est étendue à toutes les valeurs entières, non négatives des s_i. Cette série est absolument convergente. Il est facile de l'évaluer, On a en effet

$$\sum_{s_1=0}^{s_1=p_1-1}\cdots\sum_{s_n=0}^{s_n=p_n-1} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi(x+\Omega) = p_1p_2\cdots p_n \mathop{\triangle}_{p_1\omega_1\ldots p_n\omega_n}^{n} \varphi(x),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers positifs quelconques. Rappelons que la fonction $\varphi(x)$, par hypothèse, tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. En faisant tendre les p_i vers l'infini on trouve par conséquent

$$\omega_1\omega_2\cdots\omega_n \sum \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi(x+\Omega) = (-1)^n \varphi(x).$$

L'équation (25) se réduit donc à la suivante

$$R_1^{(n)}(x) = R_0^{(n)}(x) - \frac{B_n^{(n)}(h)}{n!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi(x) + \varphi(x+h).$$

En substituant cette expression dans l'équation (24) on trouvera

$$(26)\quad \varphi(x+h) + \int_0^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(h-t)}{(n-1)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi(x+t)\,dt = \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi^{(\nu)}(x) + R_{m+1}^{(n)}(x)$$

où

$$R_{m+1}^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!} \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\triangle}} \varphi^{(m+1)}(x+t)\, dt.$$

On vérifie aisément que cette relation est en accord avec la relation (18). En effet, en développant le polynome de Bernoulli suivant les puissances de t on trouvera

$$\frac{B_{n-1}^{(n)}(h-t)}{(n-1)!} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \frac{(-t)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}.$$

Par conséquent on aura

$$R_0^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(h-t)}{(n-1)!} \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\triangle}} \varphi(x+t)\, dt$$

$$= \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{n-1-\nu} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \int_0^\infty \frac{t^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!} \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\triangle}} \varphi(x+t)\, dt$$

$$= (-1)^{n-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\triangle}} \varphi^{(\nu)}(x+t_1+\cdots+t_n)\, dt_1 \cdots dt_n$$

$$= \frac{-1}{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \int_0^{\omega_1} dt_1 \int_0^{\omega_2} dt_2 \cdots \int_0^{\omega_n} \varphi^{(\nu)}(x+t_1+\cdots+t_n)\, dt_n.$$

En remplaçant l'intégrale au premier membre de l'équation (26) par cette expression on retombe sur la relation (18).

13. La relation que nous venons de trouver permet de décider de la convergence de certaines séries à n entrées de la forme

$$\sum \varphi(x+\dot{\Omega}), \tag{27}$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Supposons que

(1) la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x \geqq a$, une dérivée continue d'ordre m telle que

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+\varepsilon}\varphi^{(m)}(x) = 0, \tag{28}$$

ε étant un nombre positif;

(2) l'intégrale n fois itérée

$$\int_0^\infty dt_n \cdots \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty \varphi(a + t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\, dt_1 \tag{29}$$

est convergente. *Dans ces conditions la série* (27) *sera uniformément convergente* dans l'intervalle* $x \geqq a$. *La série n fois itérée*

$$\sum_{s_n=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} \varphi(x + \Omega) \tag{30}$$

convergera aussi et elle aura la même somme que la série (27).

En effet, nous avons vu qu'on a

$$\varphi(x+h) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \int_0^1 dt_n \cdots \int_0^1 \varphi^{(\nu)}(x + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n)\, dt_1$$
$$+ \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!} \mathop{\Delta}^{n}_{\omega_1 \ldots \omega_n} \varphi^{(\nu)}(x) + R_m^{(n)}(x).$$

On en déduit la relation suivante

$$\sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} \varphi(x + h + \Omega) \tag{31}$$
$$= \frac{1}{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n} \sum_{\nu=0}^{\nu=n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \int_0^{p_n\omega_n} dt_n \cdots \int_0^{p_2\omega_2} dt_2 \int_0^{p_1\omega_1} \varphi^{(\nu)}(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\, dt_1$$
$$+ p_1 p_2 \cdots p_n \sum_{\nu=0}^{\nu=m-1} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!} \mathop{\Delta}^{n}_{p_1\omega_1 \ldots p_n\omega_n} \varphi^{(\nu)}(x) + \sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{p_1-1} R_m^{(n)}(x + \Omega),$$

* Ce théorème est une extension d'un théorème, relativement aux séries à entrée simple, donné par Bromwich (Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, vol. 6 (1908), pp. 327–338) et Hardy (idem ser. 2, vol. 9 (1911), pp. 126–144). Voir aussi: Acta Mathematica, vol. 44, p. 103.

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers positifs quelconques. Il s'agit de démontrer que le second membre tend vers une limite quand les entiers $p_1, \ldots, p_n$ tendent vers l'infini simultanément et indépendamment l'un de l'autre.

Considérons d'abord le terme complémentaire. On a

$$R_m^{(n)}(x) = \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n-1}^{(n)}(h-t)}{(m+n-1)!} \mathop{\Delta}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt$$

et par conséquent

$$(32)\quad \sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} R_m^{(n)}(x+\Omega)$$

$$= p_1 p_2 \cdots p_n \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n-1}^{(n)}(h-t)}{(m+n-1)!} \mathop{\Delta}_{p_1\omega_1 \ldots p_n\omega_n}^{n} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt.$$

Cette intégrale peut se décomposer en une somme de 2^n intégrales dont une est la suivante

$$(33)\qquad \frac{(-1)^n}{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n} \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n-1}^{(n)}(h-t)}{(m+n-1)!} \varphi^{(m)}(x+t)\,dt$$

pendant que les autres sont de la forme

$$(34)\qquad P = \frac{\pm 1}{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n} \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n-1}^{(n)}(h-t)}{(m+n-1)!} \varphi^{(m)}(x+p+t)\,dt$$

p étant un nombre qui tend vers l'infini quand tous les nombres $p_1, p_2, \cdots, p_n$ tendent vers l'infini. L'intégrale (33) ne dépend pas des p_i. Considérons les intégrales (34). On a

$$\left| \overline{B}_{m+n-1}^{(n)}(h-t) \right| < C t^{n-1},$$

C étant une constante. En tenant compte de l'équation (28) on sait trouver une constante C_1 telle que

$$|P| < C_1 \int_0^\infty \frac{t^{n-1}\,dt}{(x+p+t)^{n+\varepsilon}} < C_1 \int_0^\infty \frac{dt}{(x+p+t)^{1+\varepsilon}} = \frac{C_1}{\varepsilon} \frac{1}{(x+p)^{\varepsilon}}.$$

Il en résulte que les intégrales (34) tendent vers zéro quand tous les nombres p_i tendent vers l'infini et cela uniformément pour $x \geqq a$. Le dernier terme au second membre de l'équation (31) tend donc uniformément vers l'intégrale (33).

Posons

$$f(x) = (-1)^n \int_0^\infty dt_n \cdots \int_0^\infty dt_2 \int_0^\infty \varphi(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\, dt_1. \tag{35}$$

On a évidemment

$$f(x) = (-1)^n \int_x^\infty dt_n \int_{t_3}^\infty dt_2 \int_{t_2}^\infty \varphi(t_1)\, dt_1.$$

De l'hypothèse (2) il résulte que cette intégrale convergera pour $x \geqq a$ et que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0.$$

En dérivant n fois par rapport à x on trouve, pour $x > a$

$$f^{(n)}(x) = \varphi(x). \tag{36}$$

De l'hypothèse (1) il résulte par conséquent que

$$\lim_{x \to \infty} f^{(n+m)}(x) = 0.$$

On a donc, en vertu du théorème de Littlewood et Hardy, mentionné plus haut,

$$\lim_{x \to \infty} f^{(\nu)}(x) = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, m+n). \tag{37}$$

Cela posé considérons l'intégrale

$$\frac{1}{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n} \int_0^{p_n \omega_n} \cdots \int_0^{p_2 \omega_2} \int_0^{p_1 \omega_1} \varphi^{(\nu)}(x + t_1 + t_2 + \cdots + t_n)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n,$$

$$0 \leqq \nu < n.$$

De l'équation (36) il résulte que cette intégrale est égale à

$$p_1 p_2 \cdots p_n \overset{n}{\underset{p_1\omega_1 \ldots p_n\omega_n}{\Delta}} f^{(\nu)}(x).$$

Faisons tendre les entiers p_i vers l'infini. Puisque $\lim_{x\to\infty} f^{(\nu)}(x) = 0$ l'intégrale tendra uniformement vers une limite* et il vient

$$f^{(\nu)}(x) = (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi^{(\nu)}(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n.$$

Si $\nu > 0$ on peut réduire le degré de multiplicité de cette intégrale et l'on trouvera

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi^{(\nu)}(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n$$
$$= (-1)^\nu \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi\,(x+t_{\nu+1}+t_{\nu+2}+\cdots+t_n)\, dt_{\nu+1} \cdots dt_n.$$

Le premier terme au second membre de l'équation (31) tend donc uniformément vers une limite. Le second terme ne fait pas de difficulté. On voit immédiatement que ce terme tend uniformément vers

* La convergence de l'intégrale itérée (35) entraîne donc la convergence de l'intégrale multiple

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi\,(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n,$$

mais l'inverse n'a pas lieu. La dernière intégrale sera convergente par exemple si

$$\varphi\,(x) = x^{n-1} \sin\,(x^n),$$

mais l'intégrale

$$\int_1^\infty \varphi\,(x)\, dx$$

divergera si $n \geqq 2$, et l'intégrale (35) sera donc *a fortiori* divergente.

$$\frac{(-1)^n}{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n}\sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!}\varphi^{(\nu)}(x)$$

parce que

$$\lim_{x\to\infty}\varphi^{(\nu)}(x)=0, \qquad (\nu=0,1,2,\ldots,m-1).$$

La convergence de la série (27) est ainsi démontrée et l'on voit qu'elle se représente par l'expression suivante

$$(-1)^n\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\sum\varphi(x+h+\Omega)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=n-1}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}(-1)^{n-\nu}\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\varphi(x+t_1+t_2+\cdots+t_{n-\nu})\,dt_1dt_2\cdots dt_{n-\nu}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=m-1}\frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!}\varphi^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\bar{B}_{m+n-1}^{(n)}(h-t)}{(m+n-1)!}\varphi^{(m)}(x+t)\,dt.$$

Cette équation peut aussi s'écrire sous la forme:

$$(-1)^{(n)}\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\sum\varphi(x+h+\Omega)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=n+m-1}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}f^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\bar{B}_{m+n-1}^{(n)}(h-t)}{(m+n-1)}f^{(m+n)}(x+t)\,dt.$$

Remarquons enfin que tout ce que nous venons de dire reste vraie si, dans l'équation (31), on fait tendre d'abord p_1, puis $p_2,\ldots$ et enfin p_n vers l'infini. Le second membre de cette équation tendra vers une limite et vers la même limite que dans le cas où ces nombres tendent simultanément vers l'infini. La série n fois itérée (30) sera donc convergente.

Soit en particulier

$$\varphi(x)=x^{-n-\beta}$$

et supposons que x n'est pas négatif ou nul. On voit que la série à n entrées

$$\sum\frac{1}{(x+\Omega)^{n+\beta}}$$

et la série itérée

$$\sum_{s_n=0}^{\infty} \sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} \frac{1}{(x+\Omega)^{n+\beta}}$$

seront toutes les deux convergentes ou divergentes suivant que la partie réelle de β est positive ou non. Voici un autre exemple qui est assez intéressant. Soit

$$\varphi(x) = \frac{\sin(x^\alpha)}{x^\beta}, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

En dérivant m fois par rapport à x on voit que

$$|x^{\beta+m(1-\alpha)}\varphi^{(m)}(x)|$$

reste plus petit qu'une constante quand x augmente indéfiniment. L'équation (28) est donc satisfaite si

$$m > \Re\left(\frac{n-\beta}{1-\alpha}\right).$$

Considérons l'intégrale

$$\int_x^\infty \frac{\sin t^\alpha}{t^\beta} dt.$$

Cette intégrale convergera si $\Re(\beta) > 1-\alpha$, et elle divergera si $\Re(\beta) \leqq 1-\alpha$. En intégrant par partie on trouve

$$\int_x^\infty \frac{\sin t^\alpha}{t^\beta} dt = \frac{1}{\alpha} \frac{\cos x^\alpha}{x^{\alpha+\beta-1}} + \frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\frac{\sin x^\alpha}{x^{2\alpha+\beta-1}} - \cdots$$

$$+\frac{(-1)^{p-1}}{\alpha}\left(1+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\left(2+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\cdots\left(2p-1+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\frac{\sin x^\alpha}{x^{2p\alpha+\beta-1}}$$

$$+(-1)^p\left(1+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\left(2+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\cdots\left(2p+\frac{\beta-1}{\alpha}\right)\int_x^\infty \frac{\sin t^\alpha dt}{t^{2p\alpha+\beta}}.$$

En substituant cette expression dans l'intégrale

$$\int_x^\infty dt_2 \int_{t_2}^\infty \frac{\sin t_1^\alpha}{t_1^\beta}\, dt,$$

on voit qu'elle convergera si $\Re(\beta) > 2(1-\alpha)$. Et en choisissant p suffisamment grand on démontre aisément que la condition nécessaire et suffisante pour que l'intégrale n fois itérée soit convergente c'est que $\Re(\beta) > n(1-\alpha)$. De notre théorème il résulte donc que l'intégrale*

$$\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)^\alpha}{(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)^\beta}\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n \tag{38}$$

et que les séries

$$\sum \frac{\sin(x+\Omega)^\alpha}{(x+\Omega)^\beta},$$

$$\sum_{s_n=0}^\infty \cdots \sum_{s_2=0}^\infty \sum_{s_1=0}^\infty \frac{\sin(x+\Omega)^\alpha}{(x+\Omega)^\beta}$$

toutes les trois convergeront, si $\Re(\beta) > n(1-\alpha)$, et divergeront si $\Re(\beta) \leqq n(1-\alpha)$.

14. Si l'intégrale multiple est absolument convergente on peut l'évaluer d'une manière bien simple. En effet, considérons l'intégrale

$$P_n = \int\int \cdots \int \varphi(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)\, dt_1\, dt_2 \cdots dt_n$$

étendue au continuum défini par les inégalites

$$t_1 \geqq 0, \quad t_2 \geqq 0, \ldots, t_n \geqq 0,$$

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_n \leqq h.$$

* Nous avons supposé que $1 > \alpha > 0$. Si $\alpha \geqq 1$ on voit aisément que la condition pour que l'intégrale (38) converge est encore celle qui a été donnée dans le texte. Mais cela n'est plus vrai pour les deux séries.

On a évidemment

$$P_n = \int_0^h \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(x+t)\,dt.$$

En effet cette équation est vraie, si $n = 1$. Supposons qu'elle soit vraie pour P_{n-1}. On aura alors

$$P_n = \int_0^h dt_n \int_{t_n}^h \frac{(t-t_n)^{n-2}}{(n-2)!}\varphi(x+t)\,dt$$

$$= \int_0^h \varphi(x+t)\,dt \int_0^t \frac{(t-t_n)^{n-2}}{(n-2)!}\,dt_n = \int_0^h \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(x+t)\,dt.$$

Faisons tendre h vers l'infini dans l'équation (39), il vient

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \varphi(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n$$

$$= \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(x+t)\,dt,$$

pourvu que l'intégrale au premier membre soit absolument convergente. Dans ces conditions on a par conséquent aussi

$$\int_x^\infty dt_n \cdots \int_{t_3}^\infty dt_2 \int_{t_2}^\infty \varphi(t_1)\,dt_1 = \int_0^\infty \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(x+t)\,dt,$$

ce qu'on trouve encore en renversant l'ordre des intégrations. Si $\varphi(x)$ est positive à partir d'une certaine valeur de x, l'intégrale au premier membre sera donc convergente ou divergente suivant que l'intégrale au second membre aura ou non un sens. On a par conséquent le théorème suivant:

Admettons que la fonction $\varphi(x)$ est positive, pour $x \geqq a$, et qu'elle admet une dérivée continue d'ordre m telle que

$$\lim x^{n+\varepsilon}\varphi^{(m)}(x) = 0, \qquad \varepsilon > 0. \tag{40}$$

Alors, pour que la série à n entrées

$$\sum \varphi(x+\Omega) \tag{41}$$

converge il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int_a^\infty x^{n-1}\varphi(x)\,dx \tag{42}$$

converge. Supposons par exemple que

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^n \log x \log_2 x \cdots \log_r x\,(\log_r x)^\epsilon}.$$

On voit que la série (41) converge ou diverge suivant que ϵ est positif ou négatif. Supposons en second lieu que

$$\varphi(x) = \frac{1}{x^\beta(1+x^\alpha(\sin\pi\sqrt{x})^2)}, \qquad \text{où } \tfrac{1}{2} > \alpha > 0, \qquad \beta > 0.$$

Pour les valeurs positives et très grandes de x cette fonction est en général du même ordre de grandeur que $x^{-\beta-\alpha}$, mais, si x est le carré d'un entier, $\varphi(x)$ est égale à $x^{-\beta}$. On peut trouver un entier m tel que l'égalité (40) soit satisfaite, et l'on peut aisément décider de la convergence de l'intégrale (42). On a en effet

$$\frac{2}{(p+1)^{2\beta+1}\sqrt{1+(p+1)^{2\alpha}}} < \int_{p^2}^{(p+1)^2} \varphi(x)\frac{dx}{x} < \frac{2}{p^{2\beta+1}\sqrt{1+p^{2\alpha}}},$$

p étant un entier positif quelconque. L'intégrale (42) est par conséquent convergente, si $\beta > n - \frac{\alpha}{2}$, et divergente, si $\beta \leqq n - \frac{\alpha}{2}$. Il en est donc de même de la série (41).

Si la fonction $\varphi(x)$ est positive à partir d'une certaine valeur de x, continuellement décroissante et tendant vers zéro quand x augmente indéfiniment, on n'a pas besoin de faire des hypothèses relativement aux dérivées de $\varphi(x)$

car on peut comparer directement la série et l'intégrale et l'on voit immédiatement que *la série à n entrées*

$$\sum \varphi(x+\Omega)$$

sera convergente ou divergente, suivant que l'intégrale

$$\int_a^\infty x^{n-1}\varphi(x)\,dx$$

aura ou non un sens.

En ce cas particulier le théorème se déduit d'un théorème classique de Maclaurin* et de Cauchy† qui a été étendu à des séries multiples par plusieurs auteurs‡.

15. Considérons la fonction génératrice des polynomes de Bernoulli§

$$\frac{\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_n\,\eta^n e^{-\eta h}}{(1-e^{-\omega_1\eta})(1-e^{-\omega_2\eta})\cdots(1-e^{-\omega_n\eta})}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-\eta)^\nu}{\nu!}B_\nu^{(n)}(h).$$

Si l'on arrête la série au second membre à un certain terme, on peut trouver une expression simple du reste. En effet, reprenons la formule

$$f^{(n)}(x+h)=\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} f^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\bar{B}_m^{(n)}(h-t)}{m!}\mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} f^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

où m est un entier supérieur ou égal à n. Posons $f(x)=e^{-\eta x}$, η étant un nombre positif. On aura

$$\mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} f^{(\nu)}(x)=(-\eta)^\nu e^{-\eta x}\frac{(e^{-\eta\omega_1}-1)(e^{-\eta\omega_2}-1)\cdots(e^{-\eta\omega_n}-1)}{\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_n}.$$

* *A Treatise of Fluxions,* vol. I, Edinburgh, 1742, pp. 289–290.

† *Sur la convergence des séries, Œuvres,* sér. 2, vol. 7, Paris, 1889, pp. 267–279.

‡ É. Picard, *Traité d'Analyse,* vol. I, 2e édition, Paris, 1901, pp. 288–304. É. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique,* vol. I, 2e édition, Paris, 1910, pp. 424–426. T. Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series,* London 1908, p. 80; *Report British Association,* 1906, pp. 493–494.

§ Acta Mathematica, vol. 43, p. 183.

En substituant cette expression dans l'équation précédente on trouvera

$$\frac{\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \eta^n e^{-\eta h}}{(1-e^{-\omega_1\eta})(1-e^{-\omega_2\eta})\cdots(1-e^{-\omega_n\eta})}$$

$$=\sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}(-\eta)^\nu+(-\eta)^{m+1}\int_0^\infty \frac{\overline{B}_m^{(n)}(h-t)}{m!}e^{-\eta t}\,dt.$$

De cette relation on peut déduire un lemme qui nous sera utile plus loin. En développant le premier membre suivant les puissances de η on trouve

$$\int_0^\infty \frac{\overline{B}_m^{(n)}(h-t)}{m!}e^{-\eta t}\,dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{B_{\nu+m+1}^{(n)}(h)}{(\nu+m+1)!}(-\eta)^\nu.$$

Dérivons p fois par rapport à η, il vient

$$\int_0^\infty \frac{\overline{B}_m^{(n)}(h-t)}{m!}t^p e^{-\eta t}\,dt=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\overline{B}_{\nu+m+p+1}^{(n)}(h)}{(\nu+m+p+1)!}\frac{(\nu+p)!}{\nu!}(-\eta)^\nu.$$

L'intégrale au premier membre est divergente si $\eta=0$. Mais elle représente, pour $\eta>0$, une fonction analytique de η qui est holomorphe dans le point $\eta=0$. L'intégrale tend donc vers une limite, quand η tend vers zéro, et l'on trouve

$$\lim_{\eta\to 0}\int_0^\infty \overline{B}_m^{(n)}(h-t)t^p e^{-\eta t}\,dt=\frac{m!\,p!}{(m+p+1)!}B_{m+p+1}^{(n)}(h).$$

Nous avons supposé $m\geqq n$. Si $m<n$ l'intégrale tend vers l'infini quand η tend vers zéro.

La solution principale $F_n(x)$

16. Admettons que la fonction $\varphi(x)$ satisfait à la condition du paragraphe 8. Considérons l'expression suivante

$$(43)\quad \int_a^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(x-z)}{(n-1)!}\varphi(z)e^{-\eta z}\,dz+(-1)^n\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\sum\varphi(x+\Omega)e^{-\eta(x+\Omega)},$$

la sommation étant étendue à toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. La série et l'intégrale convergent évidemment pour toute valeur positive de η. Je dis que l'expression (43) tend vers une limite quand le nombre positif η tend vers zéro, et cela uniformément quand x reste dans un intervalle fini quelconque $a \leqq x \leqq b$. Cette limite représente donc une fonction continue de x que je désignerais par $F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$. En effet, soient $p_1, p_2, \ldots, p_n$ des entiers positifs quelconques et posons

$$f(x) = \varphi(x) e^{-\eta x}.$$

Remplaçons dans l'équation (26) $\varphi(x)$ par $f(x)$ et x par $x + \Omega$; donnons aux s_i les valeurs $0, 1, 2, \ldots, p_i - 1$ et ajoutons ensemble les équations ainsi obtenues. On trouvera

$$\sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} f(x+h+\Omega) + p_1 p_2 \cdots p_n \int_0^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(h-t)}{(n-1)!} \mathop{\triangle}_{p_1\omega_1 \ldots p_n\omega_n}^{n} f(x+t)\, dt$$

$$= p_1 p_2 \cdots p_n \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!} \mathop{\triangle}_{p_1\omega_1 \ldots p_n\omega_n}^{n} f^{(\nu)}(x)$$

$$+ p_1 p_2 \cdots p_n \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!} \mathop{\triangle}_{p_1\omega_1 \ldots p_n\omega_n}^{n} f^{(m+1)}(x+t)\, dt.$$

Faisons tendre les entiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vers l'infini. Il vient

$$\int_a^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(x+h-z)}{(n-1)!} \varphi(z) e^{-\eta z}\, dz + (-1)^n \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \sum \varphi(x+h+\Omega) e^{-\eta(x+h+\Omega)}$$

$$= \int_a^x \frac{B_{n-1}^{(n)}(x+h-z)}{(n-1)!} \varphi(z) e^{-\eta z}\, dz + \sum_{\nu=0}^{\nu=m} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!} D_x^\nu [\varphi(x) e^{-\eta x}]$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!} D_x^{m+1} [\varphi(x+t) e^{-\eta(x+t)}]\, dt.$$

Faisons ensuite tendre η vers zéro. En tenant compte du lemme du paragraphe 15 et en raisonnant tout à fait de la même manière que dans le paragraphe 8 on démontre que le second membre tendra uniformément vers une limite et que cette limite est égale à l'expression qu'on obtient quand on pose η égal à zéro. On aura par conséquent

$$(44)\quad F_n(x+h\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)=\int_a^x \frac{B_{n-1}^{(n)}(x+h-z)}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\nu=m}\frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!}\varphi^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

En remarquant que le polynome de Bernoulli se développe de la manière suivante

$$\frac{B_{n-1}^{(n)}(x+h-z)}{(n-1)!}=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\,\frac{(x-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!},$$

on voit que la première intégrale au second membre de l'équation (44) est égale à

$$\int_a^x \frac{B_{n-1}^{(n)}(x+h-z)}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\int_a^x\frac{(x-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}\varphi(z)\,dz.$$

Si l'on pose

$$f(x)=\int_a^x\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz,$$

l'équation (44) peut donc s'écrire comme il suit

$$F_n(x+h\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n+m}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}f^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!}f^{(n+m+1)}(x+t)\,dt.$$

On vérifie aisément que la fonction $F_n(x)$ est une solution de l'équation (1) paragraphe 1. En effet, en appliquant l'opération $\underset{\omega_n}{\triangle}$ à l'expression (43) et en faisant tendre η vers zéro on trouvera

$$\underset{\omega_n}{\triangle} F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \lim_{\eta \to 0} \left[\int_a^\infty \frac{B_{n-2}^{(n-1)}(x-z)}{(n-2)!} \varphi(z) e^{-\eta z} dz \right.$$

$$\left. + (-1)^{n-1} \omega_1 \ldots \omega_{n-1} \sum \varphi(x + s_1\omega_1 + \cdots + s_{n-1}\omega_{n-1}) e^{-\eta(x+s_1\omega_1+\cdots+s_{n-1}\omega_{n-1})} \right].$$

C'est-à-dire que

$$\underset{\omega_n}{\triangle} F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = F_{n-1}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}).$$

On en conclut que

$$\overset{2}{\underset{\omega_{n-1}\,\omega_n}{\triangle}} F_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = F_{n-2}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\overset{n-1}{\underset{\omega_2 \ldots \omega_n}{\triangle}} F_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = F_1(x \mid \omega_1),$$

et puisque

$$\underset{\omega_1}{\triangle} F_1(x \mid \omega_1) = \varphi(x)$$

on voit que $F_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)$ est une solution de l'équation

$$\overset{n}{\underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\triangle}} F_n(x) = \varphi(x).$$

Je désigne cette solution comme *la solution principale.*

III.

Valeurs asymptotiques des solutions principales Développements en séries

17. Je veux maintenant faire voir comment se comportent nos solutions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ pour les valeurs positives et très grandes de x. Par hypothèse il existe un entier m tel que

$$(1) \qquad \lim_{x \to \infty} x^{m+\varepsilon} \varphi^{(m+1)}(x) = 0$$

pour toute valeur positive de ε. Soit r le plus petit entier positif tel que

$$\lim_{x\to\infty} \varphi^{(r)}(x) = 0. \tag{2}$$

Posons pour abréger

$$P(x) = \sum_{\nu=0}^{r-1} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x-h), \tag{3}$$

$$Q(x) = \sum_{\nu=0}^{n+r-1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} f^{(\nu)}(x-h), \tag{4}$$

où

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)\,dz.$$

En désignant par h un nombre quelconque dans l'intervalle $0 \leqq h < \omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n$ nous avons démontré que

$$G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \tag{5}$$

$$= P(x) + \sum_{\nu=r}^{\nu=m} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x-h) + \int_{-h}^{\infty} \frac{\bar{E}_m^{(n)}(-t)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

$$F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \tag{6}$$

$$= Q(x) + \sum_{\nu=r}^{\nu=m} \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!} \varphi^{(\nu)}(x-h) + \int_{-h}^{\infty} \frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

Il résulte des équations (1) et (2) que le second terme au second membre tend vers zéro quand x augmente indéfiniment. En tenant compte de ce que nous avons dit dans le paragraphe 2 relativement à la fonction $\bar{E}$ on voit qu'on sait trouver une constante C telle que

$$\left| \int_{-h}^{\infty} \bar{E}_m^{(n)}(-t)\, \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt \right| < C \int_0^{\infty} t^{n-1} \left| \varphi^{(m+1)}(x-h+t) \right| dt.$$

Mais on a en vertu de l'équation (1)

$$\int_0^\infty t^{n-1}|\varphi^{(m+1)}(x-h+t)|\,dt < C_1\int_0^\infty \frac{t^{n-1}\,dt}{(x-h+t)^{n+\varepsilon}} = \frac{C_1}{(x-h)^\varepsilon}\int_0^\infty \frac{t^{n-1}\,dt}{(1+t)^{n+\varepsilon}}.$$

L'intégrale au second membre de l'équation (5) tend donc vers zéro quand x augmente indéfiniment. On a par conséquent

$$\lim_{x\to\infty}[G_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)-P(x)]=0. \tag{7}$$

De l'équation (6) on conclut de même que

$$\lim_{x\to\infty}[F_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)-Q(x)]=0. \tag{8}$$

Si l'on fait en particulier $h=0$ les expressions de P et de Q se réduisent aux suivantes

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{r-1}\frac{C_\nu^{(n)}}{2^\nu\,\nu!}\varphi^{(\nu)}(x) \tag{9}$$

et

$$Q(x)=\sum_{\nu=0}^{n+r-1}\frac{B_\nu^{(n)}}{\nu!}f^{(\nu)}(x). \tag{10}$$

Mais si l'on pose $h=\dfrac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}$ on aura

$$P(x)=\sum_{\nu=0}^{\leq\frac{r-1}{2}}\frac{E_{2\nu}^{(n)}}{2^{2\nu}(2\nu)!}\varphi^{(2\nu)}\left(x-\frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right), \tag{11}$$

$$Q(x)=\sum_{\nu=0}^{\leq\frac{n+r-1}{2}}\frac{D_{2\nu}^{(n)}}{2^{2\nu}(2\nu)!}f^{(2\nu)}\left(x-\frac{\omega_1+\omega_2+\cdots+\omega_n}{2}\right). \tag{12}$$

Soit par exemple $\varphi(x)=\log x$. On aura $r=1$ et l'équation (7) se réduira à la suivante

$$\lim_{x\to\infty}[G_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)-\log x]=0.$$

18. On peut souvent obtenir la valeur asymptotique avec une approximation plus grande. Soit p un nombre positif et admettons pour un moment qu'on peut choisir m tel que

$$\lim_{x\to\infty} x^{n+p+\varepsilon}\varphi^{(m+1)}(x) = 0.$$

Soit maintenant r le plus petit entier positif tel que

$$\lim_{x\to\infty} x^{p}\varphi^{(r)}(x) = 0.$$

Dans ces conditions il résulte de notre analyse que

$$\lim_{x\to\infty} x^{p}[G_n(x) - P(x)] = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{p}[F_n(x) - Q(x)] = 0.$$

Il arrive donc que ces équations sont satisfaites quelque grand que soit p pourvu qu'on ait choisi r suffisamment grand.

19. Revenons aux hypothèses du paragraphe 17. Je vais indiquer, pour la fonction G_n, une nouvelle expression limite qui est assez remarquable. De l'équation

$$\mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\ldots\omega_n} G_n(x) = \varphi(x)$$

on tire immédiatement la relation identique suivante

$$0 = \sum_{s_n=0}^{p_n-1}\cdots\sum_{s_2=0}^{p_2-1}\sum_{s_1=0}^{p_1-1}(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}\varphi(x+\Omega) - \mathop{\nabla}^{n}_{p_1\omega_1\ldots p_n\omega_n} G_n(x),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers positifs impairs. En ajoutant et en soustrayant l'expression $P(x) - 2^n \overset{n}{\nabla} P(x)$ dans le second membre, cette relation peut s'écrire comme il suit*

* Quand il n'y a pas lieu à équivoque j'écris pour abréger $\mathop{\nabla}^{n}_{\omega_i}$ au lieu de $\mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\ldots\omega_n}$.

$$G_n(x) = 2^n \sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega) + P(x)$$

$$-2^n \overset{n}{\underset{p_i\omega_i}{\nabla}} P(x) + \left[G_n(x) - P(x) - 2^n \overset{n}{\underset{p_i\omega_i}{\nabla}} [G_n(x) - P(x)] \right].$$

Faisons tendre tous le nombres p_i vers l'infini. Le dernier terme au second membre tend uniformément vers zéro en vertu de l'équation (7). On a par conséquent

$$(13)\quad G_n(x) = \lim_{p_1,\cdots,p_n\to\infty} \left[2^n \sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega) \right.$$

$$\left. + P(x) - 2^n \overset{n}{\underset{p_i\omega_i}{\nabla}} P(x) \right].$$

C'est le résultat que j'avais en vue. Si l'on suppose que les dérivées de $\varphi(x)$ qui entrent en considération sont continues pour $x \geqq b$, on voit que cette égalité a lieu uniformément dans l'intervalle $x \geqq b+h$.

Si en particulier $r=0$ la fonction $P(x)$ se réduit à zéro. On a donc toujours

$$G_n(x) = 2^n \sum (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega)$$

quand cette série converge.

Si l'on aime mieux on peut aussi écrire l'équation (13) comme il suit

$$(14)\quad G_n(x) = \lim_{p_1,\cdots,p_n\to\infty} \left[2^n \sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{p_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega) \right.$$

$$\left. - \sum_{s_n=0}^{s_n=1} \cdots {\sum_{s_1=0}^{s_1=1}}' (-1)^{\sigma} P(x + s_1 p_1 \omega_1 + \cdots + s_n p_n \omega_n) \right]$$

où

$$\sigma = s_1(p_1-1) + s_2(p_2-1) + \cdots + s_n(p_n-1).$$

Le crochet ' signifie que le cas $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = 0$ est à exclure. Dans cette dernière équation $p_1, p_2, \cdots, p_n$ sont des entiers positifs quelconques.

Dans le cas particulier où $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = \omega$ notre équation peut se réduire. Si l'on suppose en outre que $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$, p étant un entier positif quelconque, on trouve

$$G_n(x) = \lim_{p\to\infty}\Big[2^n \sum_{s_n=0}^{p-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{p-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega)$$
$$- \sum_{s=1}^{s=n} (-1)^{s(p-1)} \binom{n}{s} P(x+sp\omega)\Big].$$

Passons à la fonction F_n. De l'équation

$$\mathop{\triangle}^{n}_{\omega_1\cdots\omega_n} F_n(x) = \varphi(x)$$

on déduit la relation identique suivante

$$0 = \sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} \varphi(x+\Omega) - p_1 p_2 \cdots p_n \mathop{\triangle}^{n}_{p_1\omega_1\cdots p_n\omega_n} F_n(x),$$

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ étant des entiers positifs quelconques. En ajoutant et en soustrayant l'expression

$$Q(x) - (-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n \, \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \mathop{\triangle}^{n}_{p_1\omega_1\cdots p_n\omega_n} Q(x)$$

dans le second membre, cette relation peut s'écrire comme il suit:

$$F_n(x) = (-1)^n \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{p_1-1} \varphi(x+\Omega)$$
$$+ Q(x) - (-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n \, \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \mathop{\triangle}^{n}_{p_i\omega_i} Q(x)$$
$$+ \Big[F_n(x) - Q(x) - (-1)^n p_1 p_2 \cdots p_n \, \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \mathop{\triangle}^{n}_{p_i\omega_i} [F_n(x) - Q(x)]\Big].$$

Faisons tendre tous les p_i vers l'infini. Le dernier terme au second membre tend vers zéro en vertu de l'équation (8). On a donc

$$(15)\quad F_n(x) = \lim_{p_1,\ldots,p_n\to\infty}\Big[(-1)^n\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\sum_{s_n=0}^{p_n-1}\cdots\sum_{s_1=0}^{p_1-1}\varphi(x+\Omega)$$

$$+Q(x)-(-1)^n p_1\cdots p_n\,\omega_1\cdots\omega_n \mathop{\Delta}_{p_i\omega_i}^{n} Q(x)\Big].$$

Cette équation peut aussi s'écrire comme il suit:

$$(16)\quad F_n(x) = \lim_{p_1,\ldots,p_n\to\infty}\Big[(-1)^n\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\sum_{s_n=0}^{p_n-1}\cdots\sum_{s_1=0}^{p_1-1}\varphi(x+\Omega)$$

$$-\sum_{s_n=0}^{s_n=1}\cdots\sum_{s_1=0}^{s_1=1}{}'(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}Q(x+s_1p_1\omega_1+\cdots+s_np_n\omega_n)\Big]$$

où le crochet ' signifie que le cas $s_1=s_2=\cdots=s_n=0$ sera exclu.

Dans le cas particulier où $\omega_1=\omega_2=\cdots=\omega_n=\omega$ et $p_1=p_2=\cdots=p_n=p$ notre équation se réduit et prend la forme suivante

$$F_n(x)=\lim_{p\to\infty}\Big[(-1)^n\omega^n\sum_{s_n=0}^{p-1}\cdots\sum_{s_1=0}^{p-1}\varphi(x+\Omega)-\sum_{s=1}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}Q(x+sp\omega)\Big].$$

Ces égalités ont donc lieu uniformément dans l'intervalle $x\geqq b+h$.

20. On peut aussi exprimer G_n et F_n par G_{n-1} et F_{n-1}. En effet des équations

$$\mathop{\nabla}_{\omega_n} G_n(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = G_{n-1}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}),$$

$$\mathop{\Delta}_{\omega_n} F_n(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n) = F_{n-1}(x\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}),$$

il résulte qu'on a, pour toute valeur entière et positive de p,

$$G_p(x) = 2\sum_{s=0}^{p-1}(-1)^s G_{n-1}(x+s\omega_n)+(-1)^p G_n(x+p\omega_n)$$

$$=2\sum_{s=0}^{p-1}(-1)^s G_{n-1}(x+s\omega_n)+(-1)^p P(x+p\omega_n)$$

$$+(-1)^p\,[G_n(x+p\omega_n)-P(x+p\omega_n)],$$

$$F_n(x) = F_n(x+p\omega_n) - \omega_n \sum_{s=0}^{p-1} F_{n-1}(x+s\omega_n)$$

$$= Q(x+p\omega_n) - \omega_n \sum_{s=0}^{p-1} F_{n-1}(x+s\omega_n) + [F_n(x+p\omega_n) - Q(x+p\omega_n)].$$

Quand p augmente indéfiniment il vient

$$G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \lim_{p\to\infty} \left[2\sum_{s=0}^{p-1} (-1)^s G_{n-1}(x+s\omega_n) + (-1)^p P(x+p\omega_n) \right],$$

$$F_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \lim_{p\to\infty} \left[Q(x+p\omega_n) - \omega_n \sum_{s=0}^{p-1} F_{n-1}(x+s\omega_n \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \right].$$

Dans le cas particulier où

$$\lim_{x\to\infty} \varphi(x) = 0$$

ces équations se réduisent et s'écrivent comme il suit:

$$G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = 2\sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s G_{n-1}(x+s\omega_n \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}),$$

$$F_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \lim_{p\to\infty} \left[\int_a^{x+p\omega_n} \frac{B_{n-1}^{(n)}(x+p\omega_n - z)}{(n-1)!} \varphi(z)\, dz - \omega_n \sum_{s=0}^{p-1} F_{n-1}(x+s\omega_n) \right].$$

21. Nous avons défini les fonctions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ en partant des séries généralement divergentes

$$2^n \sum (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega), \tag{17}$$

$$\omega_1 \cdots \omega_n \sum \varphi(x+\Omega). \tag{18}$$

Je veux maintenant démontrer qu'on peut représenter ces fonctions par des séries convergentes. Par voie d'induction on démontre les relations identiques suivantes

$$2^n \sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} P(x+\Omega)$$

$$= \sum_{s_n=0}^{s_n=1} \cdots \sum_{s_2=0}^{s_2=1} \sum_{s_1=0}^{s_1=1} (-1)^{\sigma} P(x+s_1 p_1 \omega_1 + s_2 p_2 \omega_2 + \cdots + s_n p_n \omega_n),$$

$$\sum_{s_n=0}^{p_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{p_2-1} \sum_{s_1=0}^{p_1-1} \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} Q(x+\Omega) = p_1 p_2 \cdots p_n \mathop{\Delta}_{p_1\omega_1\ldots p_n\omega_n}^{n} Q(x).$$

Puisque les expressions (14) et (15) convergent uniformément vers les fonctions G_n et F_n on en conclut que ces fonctions se représentent par les séries à n entrées

$$(19)\quad G_n(x) = P(x) + 2^n \sum (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \left[\varphi(x+\Omega) - \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} P(x+\Omega)\right],$$

$$(20)\quad F_n(x) = Q(x) + (-1)^n \omega_1\omega_2\cdots\omega_n \sum \left[\varphi(x+\Omega) - \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} Q(x+\Omega)\right],$$

les sommations étant étendues à toutes les valeurs entières, non négatives de s_1, de $s_2, \ldots$ et de s_n. Ces séries convergent donc uniformément dans l'intervalle $x \geqq b+h$. Les séries se réduisent quand on pose

$$h = \frac{\omega_1 + \omega_2 + \cdots + \omega_n}{2}.$$

Car en ce cas le nombre des termes qui figurent dans les expressions $P(x)$ et $Q(x)$ est seulement la moitié de ce qu'il est dans le cas général.

De l'analyse du paragraphe 19 il résulte que si l'on fait tendre d'abord p_1, puis $p_2, \ldots$ et enfin p_n vers l'infini les expressions (14) et (15) tendent encore vers des limites et vers les mêmes limites que dans le cas où ces nombres tendent simultanément vers l'infini. On en conclut que les fonctions G_n et F_n se répresentent encore par les séries n fois itérées

$$G_n(x) = P(x) + 2^n \sum_{s_n=0}^{\infty} (-1)^{s_n} \cdots \sum_{s_2=0}^{\infty} (-1)^{s_2} \sum_{s_1=0}^{\infty} (-1)^{s_1} \left[\varphi(x+\Omega) - \mathop{\nabla}_{\omega_i}^{n} P(x+\Omega)\right],$$

$$F_n(x) = Q(x) + (-1)^n \omega_1\omega_2\cdots\omega_n \sum_{s_n=0}^{\infty} \cdots \sum_{s_2=0}^{\infty} \sum_{s_1=0}^{\infty} \left[\varphi(x+\Omega) - \mathop{\Delta}_{\omega_i}^{n} Q(x+\Omega)\right].$$

Il convient de remarquer que les séries, dont nous venons de démontrer la convergence uniforme, en général ne sont pas absolument convergentes. Nous avons choisi l'entier r aussi petit que possible pour donner aux séries la forme la plus simple, mais en augmentant la valeur de r dans les expressions $P(x)$ et $Q(x)$ on peut souvent augmenter la rapidité de la convergence et pour une certaine valeur de r on arrive à une série absolument convergente. Supposons, pour fixer les idées, qu'il existe un entier m_1 tel que

$$\lim_{x\to\infty} x^{2n+\varepsilon}\varphi^{(m_1+1)}(x) = 0, \qquad m_1 \geqq n,$$

et soit m le plus petit entier tel que l'équation (1) soit satisfaite. Remplaçons r par $m+1$ dans l'expression $P(x)$ et par $m+1-n$ dans l'expression $Q(x)$. On a alors

$$\varphi(x) - \mathop{\nabla}^{n}_{\omega_i} P(x) = \sum_{\nu=m+1}^{m_1} \frac{E_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\nabla}^{n}_{\omega_i} \varphi^{(\nu)}(x-h) + \int_{-h}^{\infty} \frac{\bar{E}_{m_1}^{(n)}(-t)}{m_1!} \mathop{\nabla}^{n}_{\omega_i} \varphi^{(m_1+1)}(x+t)\,dt,$$

$$\varphi(x) - \mathop{\triangle}^{n}_{\omega_i} Q(x) = \sum_{\nu=m+1}^{m_1} \frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!} \mathop{\triangle}^{n}_{\omega_i} f^{(\nu)}(x-h) + \int_{-h}^{\infty} \frac{\bar{B}_{m_1}^{(n)}(-t)}{m_1!} \mathop{\triangle}^{n}_{\omega_i} f^{(m_1+1)}(x+t)\,dt.$$

On voit sur ces équations que le terme général des séries (19) et (20) est en valeur absolue plus petit que

$$\frac{C}{(x+\Omega)^{n+\varepsilon}},$$

C étant une constante. La série (19) converge donc absolument si l'on remplace r par $m+1$ et la série (20) converge absolument si l'on remplace r par $m+1-n$. Il y a pourtant une différence à noter entre les deux séries. Pour la série (19), la valeur de r qui entraîne la convergence absolue est en général plus grande que celle qui entraîne la convergence simple. Mais pour la série (20) il arrive bien souvent que ces deux valeurs coïncident. Pour élucider ce fait considérons les trois exemples suivants. Soit d'abord

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}.$$

L'équation (2) est satisfaite pour $r = 0$. On a donc $P(x) = 0$ et la série (17) converge, mais elle n'est pas absolument convergente. Pour que la série (19) converge absolument il faut et il suffit que $r \geqq n$. La série (18) diverge mais la série (20) converge absolument, si $r = 0$, et *a fortiori,* si $r > 0$.

Supposons, en second lieu, que

$$\varphi(x) = x^\beta,$$

β étant un nombre positif qui n'est pas un entier. La série (17) diverge. La série (19) converge simplement si $\beta < r < \beta + n$. Cette série sera absolument convergente si $r > \beta + n$. La série (20) sera absolument convergente, si $r > \beta$, et elle diverge si $r < \beta$. Dans ces deux cas toute série de la forme (20) qui converge est en même temps absolument convergente.

Soit enfin

$$\varphi(x) = \sin(x^\alpha), \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Les séries (17) et (18) divergent. La série (19) converge pour $r \geqq 1$ et elle converge absolument pour $r > \dfrac{n}{1-\alpha}$. La série (20) sera convergente si $r \geqq 1$. Mais pour que cette série converge absolument il faut en outre que $r > \dfrac{\alpha n}{1-\alpha}$, et ce nombre est supérieur à 1, si $\alpha > \dfrac{1}{n+1}$.

22. Reprenons les développements

$$\text{(21)} \qquad G_n(x+h \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{E_\nu^{(n)}(h \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)}{\nu!} \varphi^{(\nu)}(x)$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h-t)}{m!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

$$\text{(22)} \qquad F_n(x+h \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum_{\nu=0}^{n+m} \frac{B_\nu^{(n)}(h \mid \omega_1, \ldots, \omega_n)}{\nu!} f^{(\nu)}(x)$$

$$+ \int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

où l'on a posé

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)\,dz.$$

Nous avons vu que ces deux séries mettent en évidence la manière dont se comportent les fonctions G_n et F_n pour les valeurs très grandes de la variable x. Laissons maintenant x fixe et considérons les ω_i comme des variables. Le point $\omega_1 = \omega_2 = \cdots = \omega_n = 0$ est, en général, un point singulier* des fonctions G_n et F_n, mais les deux séries nous donnent des renseignements sur la manière dont se comportent les fonctions G_n et F_n pour les valeurs positives et très petites des variables $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. En effet, remplaçons h par λh et ω_i par $\lambda \omega_i$, on obtient deux séries procédant suivant les puissances croissantes de λ car on a, quel que soit λ,

$$E_\nu^{(n)}(\lambda h \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \ldots, \lambda\omega_n) = \lambda^\nu E_\nu^{(n)}(h \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n),$$

$$B_\nu^{(n)}(\lambda h \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \ldots, \lambda\omega_n) = \lambda^\nu B_\nu^{(n)}(h \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

On aura donc

$$(23)\; G_n(x+\lambda h \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \ldots, \lambda\omega_n) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} E_\nu^{(n)}(h \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\, \varphi^{(\nu)}(x) + \Re_m,$$

$$(24)\; F_n(x+\lambda h \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \ldots, \lambda\omega_n) = \sum_{\nu=0}^{n+m} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(h \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)\, f^{(\nu)}(x) + R_{m+n},$$

où

$$(25) \qquad \Re_m = \lambda^{m+1} \int_0^\infty \frac{\bar{E}_m^{(n)}(h-z)}{m!}\, \varphi^{(m+1)}(x+\lambda z)\, dz,$$

et

$$R_{m+n} = \lambda^{m+n+1} \int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(h-z)}{(m+n)!}\, \varphi^{(m+1)}(x+\lambda z)\, dz.$$

Cherchons une limite supérieure du reste en supposant λ positive et très petite. On sait trouver une constante C telle que

$$|R_{m+n}| < \lambda^{m+n+1} C \int_0^\infty \frac{z^{n-1}\, dz}{(x+\lambda z)^{n+\varepsilon}} = \lambda^{m+1} \frac{C}{x^\varepsilon} \int_0^\infty \frac{z^{n-1}\, dz}{(1+z)^{n+\varepsilon}}.$$

* Cf. **Acta Mathematica**, vol. 44, pp. 178–198.

La fonction $|R_{m+n}\lambda^{-m-1}|$ reste donc plus petite qu'une constante. quand λ tend vers zéro pendant que x reste fixe. Cela posé, remarquons qu'on a

$$R_p = \sum_{\nu=p+1}^{m+n} \frac{\lambda^\nu}{\nu!} B_\nu^{(n)}(h)\, f^{(\nu)}(x) + R_{m+n}.$$

En supposant $p \leqq m$ on en conclut que

$$\lim_{\lambda \to 0} R_p \lambda^{-p} = 0. \tag{26}$$

En considérant l'expression (25) on démontre de même que

$$\lim_{\lambda \to 0} \Re_p \lambda^{-p} = 0, \tag{27}$$

pourvu que $p \leqq m-n$. Si l'on suppose que la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x \geqq b$, des dérivées de tous les ordres et que

$$\lim_{x \to \infty} x^{n+\varepsilon} \varphi^{(m)}(x) = 0$$

pour toute valeur de m qui surpasse un certain nombre alors les équations (26) et (27) sont vraies quel que soit l'entier positif p. Par conséquent les séries (23) et (24) représentent les fonctions au premier membre asymptotiquement, au sens de Poincaré, pour les valeurs positives et très petites de λ. On a donc en particulier

$$\lim_{\lambda \to 0} G_n(x \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \ldots, \lambda\omega_n) = \varphi(x), \tag{28}$$

$$\lim_{\lambda \to 0} F_n(x \mid \lambda\omega_1, \lambda\omega_2, \ldots, \lambda\omega_n) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)\, dz. \tag{29}$$

Nos deux séries sont encore asymptotiques dans un autre sens. On peut considérer les séries (21) et (22) comme des séries procédant suivant les puissances de ω_1, de $\omega_2, \ldots,$ de ω_n et dans lesquelles les termes ont été groupés d'une certaine manière. Mais on peut ranger autrement les termes par exemple suivant les puissances d'un seul des ω, soit ω_n. En groupant ainsi les termes quel sens aura alors la série? Il est facile de le voir car de l'équation

$$\mathop{\nabla}_{\omega_n} G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = G_{n-1}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$$

on tire le développement

$$G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{\omega_n^\nu C_\nu}{\nu!\, 2^\nu} \frac{d^\nu G_{n-1}(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_{n-1})}{dx^\nu} + R.$$

En considérant x et $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ comme des nombres fixes et ω_n comme une variable positive il résulte de ce que nous venons de dire que cette série représente la fonction G_n asymptotiquement au voisinage du point $\omega_n = 0$. On aura donc en particulier

$$\lim_{\omega_n \to 0} G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = G_{n-1}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n-1}). \tag{30}$$

IV.

Quelques propriétés des solutions principales

23. Posons

$$G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n; \eta) = 2^n \sum (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)},$$

$$F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n; \eta) = \int_a^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(x-z)}{(n-1)!} \varphi(z) e^{-\eta z}\, dz$$
$$+ (-1)^n \omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \sum \varphi(x+\Omega) e^{-\eta(x+\Omega)}.$$

Nous avons défini les fonctions G_n et F_n par les équations*

$$G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \lim_{\eta \to 0} G_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n; \eta), \tag{1}$$

$$F_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n) = \lim_{\eta \to 0} F_n(x \mid \omega_1, \ldots, \omega_n; \eta). \tag{2}$$

---

*Nous supposerons que la fonction $\varphi(x)$ satisfait à la condition du paragraphe 8 ce qui entraîne l'existence des limites (1) et (2). Dans un autre mémoire, que nous publierons plus tard, nous démontrerons l'existence de ces deux limites en faisant d'autres hypothèses relativement à la fonction $\varphi(x)$. Tous les théorèmes que nous allons établir restent vrais dans ces cas et la plupart des démonstrations s'appliquent sans modification.

La fonction $G_n(x)$ se nomme *la somme de première espece de la fonction* $\varphi(x)$. Pour abréger l'écriture nous représenterons souvent cette fonction par la notation

$$\mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} x = G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

La fonction $F_n(x)$ se nomme *le somme de seconde espèce de la fonction* $\varphi(x)$ et se représente par la notation

$$\mathop{\mathsf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} z = F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

On aura donc pour la somme de première espèce

$$\mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} x = \varphi(x) \tag{3}$$

et pour la somme de seconde espèce

$$\mathop{\Delta}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} \mathop{\mathsf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} z = \varphi(x). \tag{4}$$

Les deux opérations de sommation sont donc, pour ainsi dire, les opérations inverses aux opérations $\overset{n}{\nabla}$ et $\overset{n}{\Delta}$. Je vais indiquer quelques propriétés remarquables des sommes qui résultent presque immédiatement de leur définition. *Un facteur constant c peut être mis hors du signe de sommation,* c'est-à-dire que

$$\mathop{\mathsf{S}} c\varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} x = c \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} x,$$

$$\mathop{\mathsf{S}}_a^x c\varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} z = c \mathop{\mathsf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} z.$$

La somme de $\varphi_1(x)$ *augmentée de la somme de* $\varphi_2(x)$ *est égale à la somme de* $\varphi_1(x) + \varphi_2(x)$, c'est-à-dire que

$$\mathop{\mathbf{S}}\varphi_1(x)\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} x+\mathop{\mathbf{S}}\varphi_2(x)\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} x=\mathop{\mathbf{S}}(\varphi_1(x)+\varphi_2(x))\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} x,$$

$$\mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi_1(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z+\mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi_2(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z=\mathop{\mathbf{S}}_a^x(\varphi_1(z)+\varphi_2(z))\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z.$$

Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des entiers positifs quelconques. Le polynome de Bernoulli satisfait à la relation*

$$\sum_{s_1=0}^{m_1-1} B_\nu^{(n)}\left(x+\frac{s_1\omega_1}{m_1}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\right)=m_1B_\nu^{(n)}\left(x\,\middle|\,\frac{\omega_1}{m_1},\omega_2,\ldots,\omega_n\right).$$

On aura donc pour toute valeur positive de η

$$\sum_{s_1=0}^{m_1-1} F_n\left(x+\frac{s_1\omega_1}{m_1}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n;\eta\right)=m_1F_n\left(x\,\middle|\,\frac{\omega_1}{m_1},\omega_2,\ldots,\omega_n;\eta\right)$$

parce que dans une série absolument convergente on peut ranger les termes dans tel ordre que l'on veut. Faisons tendre le nombre positif η vers zéro, il vient

$$(5)\quad \sum_{s_1=0}^{m_1-1} F_n\left(x+\frac{s_1\omega_1}{m_1}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\right)=m_1F_n\left(x\,\middle|\,\frac{\omega_1}{m_1},\omega_2,\ldots,\omega_n\right).$$

Puisque F_n est une fonction symétrique des variables $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ on en conclut que

$$(6)\quad \sum_{s_n=0}^{m_n-1}\cdots\sum_{s_2=0}^{m_2-1}\sum_{s_1=0}^{m_1-1}F_n\left(x+\frac{s_1\omega_1}{m_1}+\frac{s_2\omega_2}{m_2}+\cdots+\frac{s_n\omega_n}{m_n}\,\middle|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n\right)$$
$$=m_1m_2\cdots m_nF_n\left(x\,\middle|\,\frac{\omega_1}{m_1},\frac{\omega_2}{m_2},\ldots,\frac{\omega_n}{m_n}\right).$$

---

* Acta Mathematica, vol. 43, p. 169.

Soient maintenant $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des entiers positifs pairs. On vérifie aisément l'identité suivante

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} f(x+s_1\omega_1+s_2\omega_2+\cdots+s_n\omega_n)$$

$$=(-1)^n \omega_1\omega_2\cdots\omega_n \sum_{s_n=0}^{\frac{1}{2}m_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{\frac{1}{2}m_2-1} \sum_{s_1=0}^{\frac{1}{2}m_1-1} \mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} f(x+2s_1\omega_1+2s_2\omega_2+\cdots+2s_n\omega_n).$$

Si en particulier $f(x)$ est un polynome d'un degré inférieur à n, chaque terme dans le second membre s'annule. Le polynome de Bernoulli $B_{n-1}^{(n)}(x)$ est du degré $n-1$. Ce polynome satisfait donc à la relation

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \cdots \sum_{s_2=0}^{m_2-1} \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} B_{n-1}^{(n)}\left(x+\frac{s_1\omega_1}{m_1}+\frac{s_2\omega_2}{m_2}\cdots+\frac{s_n\omega_n}{m_n}\right)=0.$$

On aura par conséquent pour toute valeur positive de η

$$\sum_{s_n=0}^{m_n-1} \cdots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} F_n\left(x+\frac{s_1\omega_1}{m_1}+\cdots+\frac{s_n\omega_n}{m_n}\,\middle|\,\omega_1, \ldots, \omega_n;\ \eta\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^n \omega_1\omega_2\cdots\omega_n\, G_n\left(x\,\middle|\,\frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots, \frac{\omega_n}{m_n};\ \eta\right)$$

parce que les séries qui entrent en considération convergent absolument. Faisons tendre le nombre positif η vers zéro, il vient

$$(7)\qquad \sum_{s_n=0}^{m_n=1} \cdots \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1+\cdots+s_n} F_n\left(x+\frac{s_1\omega_1}{m_1}+\cdots+\frac{s_n\omega_n}{m_n}\,\middle|\,\omega_1, \ldots, \omega_n\right)$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^n \omega_1\ \omega_2\cdots\omega_n\, G_n\left(x\,\middle|\,\frac{\omega_1}{m_1}, \frac{\omega_2}{m_2}, \ldots, \frac{\omega_n}{m_n}\right).$$

Dans le cas particulier où $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 2$ cette équation peut s'écrire sous la forme suivante

$$(7\text{ bis})\qquad G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} F_n(x \mid 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_n),$$

et de même l'équation (6) prend la forme

$$(6\text{ bis})\qquad F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} F_n(x \mid 2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_n).$$

Avec la notation que nous venons d'introduire ces relations entre les sommes de première et de seconde espèce s'écrivent comme il suit,

$$(7\text{ ter})\qquad \mathop{\mathsf{S}}\varphi(x) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} x = \mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} \mathop{\mathsf{S}}_a^x \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\triangle}}_{2\omega_1 \ldots 2\omega_n} x,$$

$$(6\text{ ter})\qquad \mathop{\mathsf{S}}_a^x \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} x = \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} \mathop{\mathsf{S}}_a^x \varphi(x) \mathop{\triangle}_{2\omega_1 \ldots 2\omega_n} x.$$

De même on aura en vertu de l'équation (5)

$$(5\text{ bis})\qquad F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \mathop{\nabla}_{\omega_1} F_n(x \mid 2\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Soient en dernier lieu $m_1, m_2, \ldots, m_n$ des entiers positifs impairs. On aura, si $\eta > 0$,

$$\sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1} G_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n; \eta\right) = G_n\left(x \mid \frac{\omega_1}{m_1}, \omega_2, \ldots, \omega_n; \eta\right).$$

En faisant tendre η vers zéro on trouvera

$$(8)\qquad \sum_{s_1=0}^{m_1-1} (-1)^{s_1} G_n\left(x + \frac{s_1\omega_1}{m_1} \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\right) = G_n\left(x \mid \frac{\omega_1}{m_1}, \omega_2, \ldots, \omega_n\right).$$

On en déduit la relation plus générale

$$(9)\qquad \sum_{s_n=0}^{m_n-1}\cdots\sum_{s_1=0}^{m_1-1}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}\,G_n\left(x+\frac{s_1\omega_1}{m_1}+\cdots+\frac{s_n\omega_n}{m_n}\,\Big|\,\omega_1,\ldots,\omega_n\right)$$

$$=G_n\left(x\,\Big|\,\frac{\omega_1}{m_1},\ \frac{\omega_2}{m_2},\ldots,\frac{\omega_n}{m_n}\right).$$

24. Ces formules se prêtent à un passage à la limite. Soit Θ_s un nombre tel que $0<\Theta_s<1$. L'équation (8) peut s'écrire comme il suit

$$G_n(x)+\frac{\omega_1}{m_1}\sum_{s=1}^{\frac{1}{2}(m_1-1)}\frac{d}{dx}G_n\left(x+\frac{(2s-1)\,\omega_1}{m_1}+\frac{\Theta_s\,\omega_1}{m_1}\right)=G_n\left(x\,\Big|\,\frac{\omega_1}{m_1},\omega_2,\ldots,\omega_n\right).$$

Cette équation est vraie quelque grand que soit l'entier m_1. Quand m_1 augmènte indéfiniment le premier membre tend vers la limite

$$G_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)+\tfrac{1}{2}\int_x^{x+\omega_1}\frac{d}{dx}G_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\,dx$$

$$=G_n(x)+\tfrac{1}{2}G_n(x+\omega_1)-\tfrac{1}{2}G_n(x)$$

$$=G_{n-1}(x\,|\,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n).$$

On aura donc

$$(10)\qquad \lim_{m_1\to\infty}G_n\left(x\,\Big|\,\frac{\omega_1}{m_1},\omega_2,\ldots,\omega_n\right)=G_{n-1}(x\,|\,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n).$$

On en conclut sans peine que

$$(11)\qquad \lim_{\omega_{p+1},\,\omega_{p+2},\ldots,\,\omega_n\to 0}G_n(x|\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)=G_p(x|\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_p)$$

et que

$$(12)\qquad \lim_{\omega_1,\ldots,\,\omega_n\to 0}G_n(x|\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)=\varphi(x),$$

comme nous l'avons déjà vu dans le paragraphe 22.

Divisons les deux membres de l'équation (5) par m_1 et faisons ensuite tendre l'entier m_1 vers l'infini. Le premier membre tend vers l'intégrale

$$\frac{1}{\omega_1}\int_x^{x+\omega_1} F_n(x)\,dx.$$

Le second membre tendra donc aussi vers une limite et l'on trouvera

$$(13)\quad \frac{1}{\omega_1}\int_x^{x+\omega_1} F_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\,dx = \lim_{m_1\to\infty} F_n\left(x\,|\,\frac{\omega_1}{m_1},\omega_2,\ldots,\omega_n\right).$$

De même, divisons les deux membres de l'équation (6) par le produit des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Soit p un des nombres $1, 2, \ldots, n$. Posons $m_{p+1} = m_{p+2} = \cdots = m_n = 1$ et admettons que les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_p$ augmentent indéfiniment. On trouvera

$$\begin{aligned}(14)\quad &\frac{1}{\omega_1\omega_2\cdots\omega_p}\int_0^{\omega_p} dt_p\cdots\int_0^{\omega_2} dt_2\int_0^{\omega_1} F_n(x+t_1+t_2+\cdots+t_p\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\,dt_1\\ &= \lim_{m_1\cdots m_p\to\infty} F_n\left(x\,|\,\frac{\omega_1}{m_1},\ldots,\frac{\omega_p}{m_p},\omega_{p+1},\ldots,\omega_n\right).\end{aligned}$$

Si en particulier $p = n$, la limite au second membre est égale à la fonction $f(x)$; c'est ce qui résulte de l'équation (29) paragraphe 22. On aura donc

$$\begin{aligned}(15)\quad &\int_0^1 dt_n\cdots\int_0^1 dt_2\int_0^1 F_n(x+\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_n t_n\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\,dt_1\\ &= \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz.\end{aligned}$$

25. Je vais donner une démonstration plus directe de cette relation remarquable. Reprenons la série qui entre dans l'expression de $F_n(x;\eta)$ et considérons l'intégrale suivante

$$\int_0^{\omega_n}\cdots\int_0^{\omega_2}\int_0^{\omega_1}\sum\varphi(x+t_1+t_2+\cdots+t_n+\Omega)\,e^{-\eta(x+t_1+t_2+\cdots+t_n+\Omega)}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n.$$

η étant positif, on peut intégrer terme par terme. Cette intégrale est donc égale à

$$\sum\int_0^{\omega_n}\cdots\int_0^{\omega_2}\int_0^{\omega_1}\varphi(x+t_1+t_2+\cdots+t_n+\Omega)\,e^{-\eta(x+t_1+t_2+\cdots+t_n+\Omega)}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n$$

$$=\int_0^{\infty}\cdots\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\varphi(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)\,e^{-\eta(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)}\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(x+t)\,e^{-\eta(x+t)}\,dt$$

$$=\int_x^{\infty}\frac{(z-x)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz.$$

Cela posé, remarquons que le polynome de Bernoulli satisfait à la relation*

$$\frac{1}{\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_n}\int_0^{\omega_n}\cdots\int_0^{\omega_2}\int_0^{\omega_1}B_\nu^{(n)}(x+t_1+t_2+\cdots+t_n)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n=x^\nu.$$

On aura donc pour toute valeur positive de η

$$\frac{1}{\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_n}\int_0^{\omega_n}\cdots\int_0^{\omega_2}\int_0^{\omega_1}F_n(x+t_1+t_2+\cdots+t_n\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n;\eta)\,dt_1\,dt_2\cdots dt_n$$

$$=\int_a^{\infty}\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz-\int_x^{\infty}\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz$$

$$=\int_a^{x}\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z)\,e^{-\eta z}\,dz.$$

* Acta Mathematica, vol. 43, p. 172.

Faisons tendre η vers zéro. Puisque la fonction $F_n(x;\eta)$ tend uniformément vers la limite $F_n(x)$ on trouvera

$$\frac{1}{\omega_1\omega_2\cdots\omega_n}\int_0^{\omega_n} dt_n\cdots\int_0^{\omega_2} dt_2\int_0^{\omega_1} F_n(x+t_1+t_2+\cdots+t_n\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\,dt_1$$

$$=\int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\,\varphi(z)\,dz.$$

Cherchons maintenant à évaluer l'intégrale au premier membre de l'équation (13). Je dis qu'on a

$$(16)\qquad \frac{1}{\omega_1}\int_0^{\omega_1} F_n(x+t\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\,dt=\underset{a}{\overset{x}{\mathsf{S}}}\left(\int_a^z\varphi(z)\,dz\right)\underset{\omega_2\ldots\omega_n}{\overset{n-1}{\triangle}} z.$$

Rappelons d'abord que cette équation est vraie dans le cas où F_n se réduit au polynome de Bernoulli* c'est-à-dire que

$$\frac{1}{\omega_1}\int_0^{\omega_1} B_\nu^{(n)}(x+t\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\,dt = B_\nu^{(n-1)}(x\,|\,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n).$$

La fonction F_n se développe de la manière suivante

$$(17)\qquad F_n(x+h)=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{B_\nu^{(n)}(h)}{\nu!}\int_a^x\frac{(x-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}\,\varphi(z)\,dz$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m}\frac{B_{\nu+n}^{(n)}(h)}{(\nu+n)!}\,\varphi^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty\frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(h-t)}{(m+n)!}\,\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

---

* Acta Mathematica, vol. 43, p. 171.

Intégrons par rapport à h, on trouvera

$$\frac{1}{\omega_1}\int_0^{\omega_1} F_n(x+h\,|\,\omega_1,\ldots,\omega_n)\,dh = \sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{B_\nu^{(n-1)}}{\nu!}\int_a^x \frac{(x-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}\varphi(z)\,dz$$

(18)

$$+\sum_{\nu=0}^{m}\frac{B_{\nu+n}^{(n-1)}}{(\nu+n)!}\varphi^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+n}^{(n-1)}(-t)}{(m+n)!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt.$$

D'autre part, on a en vertu de l'équation (17)

$$\mathop{\mathbf{S}}_a^x \psi(z)\mathop{\Delta}_{\omega_2\ldots\omega_n}^{n-1} z = \sum_{\nu=0}^{n-2}\frac{B_\nu^{(n-1)}}{\nu!}\int_a^x \frac{(x-z)^{n-2-\nu}}{(n-2-\nu)!}\psi(z)\,dz$$

(19)

$$+\sum_{\nu=0}^{m+1}\frac{B_{\nu+n-1}^{(n-1)}}{(\nu+n-1)!}\psi^{(\nu)}(x)+\int_0^\infty \frac{\bar{B}_{m+n}^{(n-1)}(-t)}{(m+n)!}\psi^{(m+2)}(t)\,dt.$$

Si l'on pose en particulier

$$\psi(x)=\int_a^x \varphi(z)\,dz$$

le second membre de l'équation (19) devient identique au second membre de l'équation (18). L'équation (16) est par conséquent vraie. La valeur moyenne de la fonction $F_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)$ dans un intervalle de longueur ω_1 est donc une fonction qui ne dépend pas de ω_1. Cette valeur moyenne est une fonction symétrique des variables $\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n$. En rapprochant l'équation (16) à l'équation (13) on voit qu'on aura

(20) $$\lim_{\omega_1\to 0}\mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z = \mathop{\mathbf{S}}_a^x\left(\int_a^z \varphi(z)\,dz\right)\mathop{\Delta}_{\omega_2\ldots\omega_n}^{n-1} z.$$

En intégrant la fonction F_n p fois de suite on trouve, en vertu de l'équation (16),

$$\frac{1}{\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_p}\int\limits_0^{\omega_p} dt_p\cdots\int\limits_0^{\omega_2} dt_2\int\limits_0^{\omega_1} F_n(x+t_1+t_2+\cdots+t_p\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n)\,dt_1$$

$$=\mathop{\mathrm{S}}_a^x\left(\int\limits_a^z\frac{(z-t)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi(t)\,dt\right)\mathop{\Delta}_{\omega_{p+1}\cdots\omega_n}^{n-p} z.$$

En rapprochant cette équation à l'équation (14) on voit que, si l'on fait tendre les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ vers zéro, on trouvera

$$\text{(21)}\qquad \lim_{\omega_1\cdots\omega_p\to 0}\mathop{\mathrm{S}}_a^x\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\cdots\omega_n}^{n} z=\mathop{\mathrm{S}}_a^x\left(\int\limits_a^z\frac{(z-t)^{p-1}}{(p-1)!}\varphi(t)\,dt\right)\mathop{\Delta}_{\omega_{p+1}\cdots\omega_n}^{n-p} z.$$

En particulier si $p=n$, tous les nombres $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ tendent vers zéro et il vient

$$\text{(22)}\qquad \lim_{\omega_1\cdots\omega_n\to 0}\mathop{\mathrm{S}}_a^x\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\cdots\omega_n}^{n} z=\int\limits_a^x\frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz.$$

26. Supposons que la fonction $\varphi(x)$ admet, pour $x\geqq b$, des dérivées continues de tous les ordres et que

$$\text{(23)}\qquad \lim_{x\to\infty} x^{n+\varepsilon}\varphi^{(\nu)}(x)=0,\qquad \text{si } \nu>m.$$

Considérons les dérivées des fonctions $G_n(x)$ et $F_n(x)$. Ces deux fonctions admettent les développements

$$\text{(24)}\qquad G_n(x)=\sum_{\nu=0}^{m}\frac{C_\nu^{(n)}}{2^\nu\,\nu!}\varphi^{(\nu)}(x)+\int\limits_0^\infty\frac{\bar{E}_m^{(n)}(-t)}{m!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

$$\text{(25)}\qquad F_n(x)=\sum_{\nu=0}^{m+n}\frac{B_\nu^{(n)}}{\nu!}f^{(\nu)}(x)+\int\limits_0^\infty\frac{\bar{B}_{m+n}^{(n)}(-t)}{(m+n)!}\varphi^{(m+1)}(x+t)\,dt,$$

où

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)\, dz.$$

En dérivant par rapport à x on trouvera

$$(26) \quad \frac{dG_n(x)}{dx} = \sum_{\nu=0}^{m} \frac{C_\nu^{(n)}}{2^\nu \nu!} \varphi^{(\nu+1)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{E}_m^{(n)}(-t)}{m!} \varphi^{(m+2)}(x+t)\, dt$$

$$(27) \quad \frac{dF_n(x)}{dx} = \sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}}{\nu!} f^{(\nu+1)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m+2)}(x+t)\, dt$$

parce que les deux dernières intégrales convergent uniformément par rapport à x. D'autre part on aura en vertu de l'équation (25)

$$\underset{a}{\overset{x}{S}} \varphi'(z) \underset{\omega_1 \ldots \omega_n}{\overset{n}{\Delta}} z = \sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}}{\nu!} \psi^{(\nu)}(x) + \int_0^\infty \frac{\overline{B}_{m+n}^{(n)}(-t)}{(m+n)!} \varphi^{(m+2)}(x+t)\, dt,$$

où l'on a posé

$$\psi(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi'(z)\, dz.$$

En intégrant par partie on trouve, si $\nu < n$

$$\psi^{(\nu-1)}(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \varphi'(z)\, dz = -\frac{(x-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \varphi(a) + \int_a^x \frac{(x-z)^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!} \varphi(z)\, dz$$

$$= -\frac{(x-a)^{n-\nu}}{(n-\nu)!} \varphi(a) + f^{(\nu)}(x).$$

De plus on aura, si $\nu \geqq n$

$$\psi^{(\nu)}(x) = f^{(\nu+1)}(x).$$

Par conséquent

$$\sum_{\nu=0}^{m+n} \frac{B_\nu^{(n)}}{\nu!}\,[f^{(\nu+1)}(x)-\psi^{(\nu)}(x)] = \varphi(a)\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{B_\nu^{(n)}}{\nu!}\,\frac{(x-a)^{n-\nu-1}}{(n-\nu-1)!}$$

$$= \varphi(a)\frac{B_{n-1}^{(n)}(x-a)}{(n-1)!}.$$

Les équations (26) et (27) peuvent donc s'écrire comme il suit

$$\text{(28)}\qquad \frac{d}{dx}\mathop{\mathbf{S}}\varphi(x)\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} x = \mathop{\mathbf{S}}\varphi'(x)\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} x,$$

$$\text{(29)}\qquad \frac{d}{dx}\mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z = \mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi'(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z+\varphi(a)\frac{B_{n-1}^{(n)}(x-a)}{(n-1)!}.$$

En dérivant de nouveau par rapport à x on trouvera

$$\frac{d^2}{dx^2}\mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z = \frac{d}{dx}\mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi'(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z+\varphi(a)\frac{B_{n-2}^{(n)}(x-a)}{(n-2)!}$$

$$= \mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi''(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z+\varphi'(a)\frac{B_{n-1}^{(n)}(x-a)}{(n-1)!}+\varphi(a)\frac{B_{n-2}^{(n)}(x-a)}{(n-2)!}.$$

En dérivant $m+n$ fois on obtient

$$\text{(30)}\qquad \frac{d^{m+n}F_n(x)}{dx^{m+n}} = \mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi^{(m+n)}(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z+\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi^{(m+\nu)}(a)\,\frac{B_\nu^{(n)}(x-a)}{\nu!}.$$

Mais le second membre peut se réduire. On a en effet

$$\mathop{\mathbf{S}}_a^x\varphi^{(m+n)}(z)\mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z = (-1)^n\omega_1\omega_2\cdots\omega_n\sum\varphi^{(m+n)}(x+\Omega)$$

$$+\int_a^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(x-z)}{(n-1)!}\,\varphi^{(m+n)}(z)\,dz.$$

En intégrant par partie on trouve, en tenant compte de l'équation (23),

$$\int_a^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(x-z)}{(n-1)!}\,\varphi^{(m+n)}(z)\,dz = \lim_{x\to\infty}\varphi^{(m)}(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi^{(m+\nu)}(a)\,\frac{B_\nu^{(n)}(x-a)}{\nu!}.$$

L'équation (30) peut donc s'écrire comme il suit

$$\frac{d^{m+n}F_n(x)}{dx^{m+n}} = \lim_{x\to\infty}\varphi^{(m)}(x) + (-1)^n\,\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_n\sum\varphi^{(m+n)}(x+\Omega).$$

La série au second membre tend évidemment vers zéro quand x augmente indéfiniment et $\varphi^{(m)}(x)$ tend vers une limite finie. De l'équation (28) on déduit de même que

$$\frac{d^m G_n(x)}{dx^m} = \mathop{\mathbf{S}}\varphi^{(m)}(x) \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} x = \varphi^{(m)}(x) + \int_0^\infty \bar{E}_0^{(n)}(-z)\,\varphi^{(m+1)}(x+z)\,dz.$$

L'intégrale au dernier membre tend vers zéro quand $x\to\infty$. On voit donc que les fonctions $F_n(x)$ et $G_n(x)$ admettent, pour $x \geqq b$, des dérivées continues de tous les ordres. En particulier les dérivées

$$F_n^{(m+n)}(x) \text{ et } G_n^{(m)}(x)$$

tendent vers des limites finies quand x augmente indéfiniment et les dérivées d'ordre superieur à celle que nous venons d'indiquer tendent vers zéro quand $x\to\infty$. Supposons maintenant que, quel que soit p, on sait trouver un entier positif m tel que

$$\lim_{x\to\infty} x^p\varphi^{(\nu)}(x) = 0 \qquad \text{si } \nu > m.$$

Dans ces conditions il résulte de notre analyse qu'on a, quelque grand que soit p,

$$\lim_{x\to\infty} x^p G_n^{(\nu)}(x) = 0,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^p F_n^{(\nu)}(x) = 0,$$

pourvu que ν ait été choisi suffisamment grand. Par conséquent, si l'on applique, un nombre quelconque de fois, aux fonctions $G_n(x)$ et $F_n(x)$ nos deux opérations de sommation on arrive toujours à des expressions convergentes.

27. Nous avons vu que

$$\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} x = \varphi(x).$$

Considérons maintenant la somme de première espèce

$$\mathop{\mathsf{S}} \left(\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \varphi(x) \right) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} x.$$

Cette somme est égale à

$$2^{-n} \sum_{s_n=0}^{s_n=1} \cdots \sum_{s_1=0}^{s_1=1} \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x + s_1\omega_1 + \cdots + s_n\omega_n) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} x = \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} x.$$

Mais la dernière expression est égale à la fonction $\varphi(x)$.

On aura donc

$$\mathop{\mathsf{S}} \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} x = \varphi(x).$$

Posons $\varphi(x) = G_{n+p}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+p})$. On aura

$$\mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_{p+1}\ldots\omega_{p+n}} \varphi(x) = G_p(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p).$$

Par conséquent

$$\mathop{\mathsf{S}} G_p(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_{p+1}\ldots\omega_{p+n}} x = G_{n+p}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{n+p}).$$

Cette équation peut aussi s'écrire

$$\mathop{\mathsf{S}} \left(\mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\overset{p}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_p} x \right) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_{p+1}\ldots\omega_{p+n}} x = \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\overset{p+n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_{p+n}} x.$$

Considérons de même la somme de seconde espèce

$$\mathop{\mathsf{S}}_a^x \left(\mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \varphi(z) \right) \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega_1\ldots\omega_n} z.$$

Cette somme est égale à

$$\frac{(-1)^n}{\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_n}\sum_{s_n=0}^{s_n=1}\cdots\sum_{s_1=0}^{s_1=1}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}\mathop{\mathsf{S}}_a^x\varphi(z+\Omega)\mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}z$$

$$=\frac{(-1)^n}{\omega_1\,\omega_2\cdots\omega_n}\sum_{s_n=0}^{s_n=1}\cdots\sum_{s_1=0}^{s_1=1}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}\left[\mathop{\mathsf{S}}_a^{x+\Omega}\varphi(z)\mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}z\right.$$

$$\left.-\int_a^{a+\Omega}\frac{B_{n-1}^{(n)}(x+\Omega-z)}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz\right]$$

$$=\mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}\mathop{\mathsf{S}}_a^x\varphi(z)\mathop{\triangle}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n}z$$

$$-\frac{(-1)^n}{\omega_1\cdots\omega_n}\sum_{s_n=0}^{s_n=1}\cdots\sum_{s_1=0}^{s_1=1}(-1)^{s_1+\cdots+s_n}\int_0^{\Omega}\frac{B_{n-1}^{(n)}(x-a+\Omega-z)}{(n-1)!}\varphi(a+z)\,dz.$$

Le premier terme dans le dernier membre est égal à $\varphi(x)$. Considérons le second terme. On aura

$$\int_0^{\Omega}\frac{B_{n-1}^{(n)}(x-a+\Omega-z)}{(n-1)!}\varphi(a+z)\,dz$$

$$=\sum_{\nu=0}^{n-1}\frac{B_\nu^{(n)}(x-a)}{\nu!}\int_0^{\Omega}\frac{(\Omega-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)\nu!}\varphi(a+z)\,dz.$$

Soit $f(x)$ une fonction telle que

$$f^{(n)}(x)=\varphi(x).$$

En intégrant par partie on trouvera

$$\int_0^{\Omega}\frac{(\Omega-z)^{n-1-\nu}}{(n-1-\nu)!}\varphi(a+z)\,dz=f^{(\nu)}(a+\Omega)-\sum_{s=0}^{n-1-\nu}\frac{\Omega^s}{s!}f^{(\nu+s)}(a).$$

Mais la difference d'ordre n de la fonction x^s est nulle, si $s < n$, c'est-à-dire que

$$\sum_{s_n=0}^{s_n=1} \cdots \sum_{s_1=0}^{s_1=1} (-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} \Omega^s = 0, \qquad s < n.$$

En substituant les expressions précédentes on trouvera donc

$$\mathop{\mathbf{S}}_a^x \mathop{\Delta}_{\omega_1 \cdots \omega_n}^{n} \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1 \cdots \omega_n}^{n} z = \varphi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(x-a)}{\nu!} \mathop{\Delta}_{\omega_1 \cdots \omega_n}^{n} f^{(\nu)}(a).$$

Mais puisque

$$\mathop{\Delta}_{\omega_1 \cdots \omega_n}^{n} f(a) = \int_0^1 dt_n \cdots \int_0^1 dt_2 \int_0^1 \varphi(a + \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \cdots + \omega_n t_n) dt_1,$$

cette équation peut aussi s'écrire comme il suit

$$\mathop{\mathbf{S}}_a^x \left(\mathop{\Delta}_{\omega_1 \cdots \omega_n}^{n} \varphi(z) \right) \mathop{\Delta}_{\omega_1 \cdots \omega_n}^{n} z$$

$$= \varphi(x) - \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(x-a)}{\nu!} \int_0^1 dt_n \cdots \int_0^1 \varphi^{(\nu)}(a + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n) dt_1.$$

Posons $\varphi(x) = F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$. On aura

$$\mathop{\Delta}_{\omega_1 \cdots \omega_p}^{p} F_n(x \mid \omega_1, \cdots, \omega_n) = F_{n-p}(x \mid \omega_{p+1}, \ldots, \omega_n).$$

Par conséquent

$$\mathop{\mathbf{S}}_a^x F_{n-p}(z \mid \omega_{p+1}, \cdots, \omega_n) \mathop{\Delta}_{\omega_1 \cdots \omega_p}^{p} z = F_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n)$$

$$- \sum_{\nu=0}^{p-1} \frac{B_\nu^{(p)}(x-a \mid \omega_1, \ldots, \omega_p)}{\nu!} \int_0^1 dt_p \cdots \int_0^1 F_n^{(\nu)}(a + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_p t_p) dt_1.$$

En posant en particulier $p = 1$ on trouvera

$$\mathop{\mathsf{S}}_a^x F_{n-1}(z\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}) \mathop{\Delta}_{\omega_n} z = F_n(x\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n) - \frac{1}{\omega_n}\int_a^{a+\omega_n} F_n(x\,|\,\omega_1, \ldots, \omega_n)\,dx.$$

28. Considérons en second lieu la somme

$$\mathop{\mathsf{S}}_a^x \Big(\mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \varphi(z)\Big) \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{2\omega_1\ldots 2\omega_n} z.$$

En raisonnant comme nous venons de le faire on démontre que cette somme est égale à

$$\mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \mathop{\mathsf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{2\omega_1\ldots 2\omega_n} z$$

$$-\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(x-a\,|\,2\omega_1, \ldots, 2\omega_n)}{\nu!} \int_0^1 dt_n \cdots \int_0^1 \varphi^{(\nu)}(a + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n)\,dt_1.$$

En tenant compte de l'equation (7 ter):

$$\text{(7 ter)} \qquad \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \mathop{\mathsf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{2\omega_1\ldots 2\omega_n} z = \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} x,$$

on trouvera donc la relation suivante

$$\text{(31)} \qquad \mathop{\mathsf{S}}_a^x \Big(\mathop{\overset{n}{\Delta}}_{\omega_1\ldots\omega_n} \varphi(z)\Big) \mathop{\overset{n}{\Delta}}_{2\omega_1\ldots 2\omega_n} z = \mathop{\mathsf{S}} \varphi(x) \mathop{\overset{n}{\nabla}}_{\omega_1\ldots\omega_n} x$$

$$-\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(x-a\,|\,2\omega_1, \ldots, 2\omega_n)}{\nu!} \int_0^1 dt_n \cdots \int_0^1 \varphi^{(\nu)}(a + \omega_1 t_1 + \cdots + \omega_n t_n)\,dt_1.$$

Remplaçons dans cette équation la fonction $\varphi(x)$ par la fonction $F_n(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ et rappelons la relation (15):

$$(15)\quad \int_0^1 dt_n \cdots \int_0^1 F_n(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_n t_n)\,dt_1 = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz.$$

Cette intégrale est une fonction de x qui s'annule dans le point $x=a$ et il en est de même de ses dérivées des $(n-1)$ premiers ordres. Le dernier terme dans le second membre de l'équation (31) disparaît donc et cette équation prend la forme

$$(32)\quad \mathop{\mathbf{S}} F_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n) \mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\ldots\omega_n} x = F_n(x\,|\,2\omega_1, 2\omega_2,\ldots,2\omega_n),$$

ou ce qui revient au même

$$\mathop{\mathbf{S}} \left(\mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(x) \mathop{\Delta}^{n}_{\omega_1\ldots\omega_n} x \right) \mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\ldots\omega_n} x = \mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(x) \mathop{\Delta}^{n}_{2\omega_1\ldots2\omega_n} x.$$

Soit p un entier $\leqq n$. Par un raisonnement semblable on démontre la relation plus générale

$$\mathop{\mathbf{S}} F_n(x\,|\,\omega_1,\omega_2,\ldots,\omega_n) \mathop{\nabla}^{p}_{\omega_1\ldots\omega_p} x = F_n(x\,|\,2\omega_1, 2\omega_2,\ldots,2\omega_p,\omega_{p+1},\ldots,\omega_n).$$

29. Considérons en dernier lieu la somme de seconde espèce

$$\mathop{\mathbf{S}}_a^x \left(\mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\ldots\omega_n} \varphi(z) \right) \mathop{\Delta}^{n}_{2\omega_1\ldots2\omega_n} z.$$

Cette somme est égale à

$$\mathop{\nabla}^{n}_{\omega_1\ldots\omega_n} \mathop{\mathbf{S}}_a^x \varphi(z) \mathop{\Delta}^{n}_{2\omega_1\ldots2\omega_n} z$$

$$-2^{-n}\sum_{s_n=0}^{s_n=1}\cdots\sum_{s_1=0}^{s_1=1}\int_0^{\Omega} \frac{B_{n-1}^{(n)}(x-a+\Omega-z\,|\,2\omega_1,\ldots,2\omega_n)}{(n-1)!}\,\varphi(a+z)\,dz.$$

En tenant compte de l'équation (6 ter):

$$\text{(6 ter)} \qquad \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\Delta}_{2\omega_1\ldots 2\omega_n}^{n} z = \mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z,$$

et en posant

$$f(x) = \int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!} \varphi(z)\, dz,$$

on trouvera donc la relation suivante

$$\mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x} \left(\mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} \varphi(z) \right) \mathop{\Delta}_{2\omega_1\ldots 2\omega_n}^{n} z = \mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x} \varphi(z) \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z$$

$$-\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(x-a\,|\,2\omega_1, \ldots, 2\omega_n)}{\nu!} \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} f^{(\nu)}(a).$$

Remplaçons dans cette équation la fonction $\varphi(x)$ par la fonction $G_n(x\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$; on trouve, après quelques réductions, la relation suivante

$$F_n(x\,|\,2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_n) = \mathop{\mathbf{S}}_{a}^{x} G_n(z\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) \mathop{\Delta}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} z$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{B_\nu^{(n)}(x-a\,|\,\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{\nu!} \xi^{(\nu)}(a),$$

où l'on a posé pour abréger

$$\xi(x) = \int_0^1 dt_n \cdots \int_0^1 dt_2 \int_0^1 F_n(x+\omega_1 t_1+\omega_2 t_2+\cdots+\omega_n t_n\,|\,2\omega_1, 2\omega_2, \ldots, 2\omega_n)\, dt_1.$$

Et la valeur de cette intégrale se détermine par l'équation

$$\int_0^1 dt_n \cdots \int_0^1 F_n(x+\omega_1 t_1+\cdots+\omega_n t_n \mid 2\omega_1, \ldots, 2\omega_n)\, dt_1$$

$$= \mathop{\mathrm{S}}\left(\int_a^x \frac{(x-z)^{n-1}}{(n-1)!}\varphi(z)\,dz\right) \mathop{\nabla}_{\omega_1\ldots\omega_n}^{n} x.$$

Polynomes de Bernoulli et polynomes d'Euler

30. Considérons à titre d'exemple le cas particulier où la fonction $\varphi(x)$ est égale à x^ν, ν étant un entier non négatif. Les développements (24) et (25) se réduisent à un nombre fini de termes car en prenant $m=\nu$ le terme complémentaire disparaît. La somme de première espèce est donc égale à un polynome d'Euler et la somme de seconde espèce s'exprime par un polynome de Bernoulli. On peut vérifier ce résultat directement de la manière suivante. On aura pour toute valeur positive de η

$$\sum(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n} e^{-\eta(x+\Omega)} = \frac{e^{-\eta x}}{(1+e^{-\eta\omega_1})(1+e^{-\eta\omega_2})\cdots(1+e^{-\eta\omega_n})},$$

$$\sum e^{-\eta(x+\Omega)} = \frac{e^{-\eta x}}{(1-e^{-\eta\omega_1})(1-e^{-\eta\omega_2})\cdots(1-e^{-\eta\omega_n})},$$

les sommations étant étendues sur toutes les valeurs entières non négatives de $s_1, s_2, \ldots, s_n$. En dérivant ν fois par rapport à η on trouvera

$$(33)\quad \sum(-1)^{s_1+s_2+\cdots+s_n}(x+\Omega)^\nu e^{-\eta(x+\Omega)}$$
$$= (-1)^\nu D_\eta^\nu \frac{e^{-\eta x}}{(1+e^{-\eta\omega_1})(1+e^{-\eta\omega_2})\cdots(1+e^{-\eta\omega_n})},$$

$$(34)\quad \sum(x+\Omega)^\nu e^{-\eta(x+\Omega)}$$
$$= (-1)^\nu D_\eta^\nu \frac{e^{-\eta x}}{(1-e^{-\eta\omega_1})(1-e^{-\eta\omega_2})\cdots(1-e^{-\eta\omega_n})}.$$

La première série est donc une fonction de η qui est holomorphe dans le point $\eta=0$, mais la seconde série est une fonction de η qui admet le point $\eta=0$ comme pôle d'ordre $n+\nu$. Dans les seconds membres de ces deux équations figurent les fonctions génératrices des polynomes d'Euler et des polynomes de Bernoulli. En développant suivant les puissances de η dans le second membre de l'équation (33) on obtient

$$G_n(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n; \eta) = (-1)^\nu D_\eta^\nu \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\eta^s}{s!} E_s^{(n)}(x),$$

$$= E_\nu^{(n)}(x) - \frac{\eta}{1} E_{\nu+1}^{(n)}(x) + \cdots.$$

Faisons tendre η vers zéro, il vient

$$\mathop{\mathbf{S}} x^\nu \mathop{\nabla}_{\omega_1 \ldots \omega_n}^{n} x = E_\nu^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Pour trouver la somme de seconde espèce il nous reste à déterminer la valeur de l'intégrale qui figure dans l'expression de $F_n(x; \eta)$:

$$F_n(x; \eta) = \int_0^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(x-z)}{(n-1)!} z^\nu e^{-\eta z} dz + (-1)^n \omega_1 \ldots \omega_n \sum (x+\Omega)^\nu e^{-\eta(x+\Omega)}.$$

On aura pour toute valeur positive de η

$$\int_0^\infty z^\nu e^{-\eta z} dz = \frac{\nu!}{\eta^{\nu+1}}.$$

Et le polynome de Bernoulli se développe de la manière suivante:

$$B_{n-1}^{(n)}(x-z) = B_{n-1}^{(n)}(x) - \binom{n-1}{1} z B_{n-2}^{(n)}(x)$$

$$+ \binom{n-1}{2} z^2 B_{n-3}^{(n)}(x) - \cdots + (-1)^{n-1} z^{n-1} B_0^{(n)}(x).$$

Par conséquent

$$\int_0^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(x-z)}{(n-1)!} e^{-\eta z} dz = (-1)^{n-1} \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{B_s^{(n)}(x)}{s!} \eta^{s-n}.$$

En dérivant ν fois par rapport à η on trouvera

$$\int_0^\infty \frac{B_{n-1}^{(n)}(x-z)}{(n-1)!} z^\nu e^{-\eta z}\, dz = -(-1)^{\nu+n} D_\eta^\nu \sum_{s=0}^{n-1} (-1)^s \frac{B_s^{(n)}(x)}{s!} \eta^{s-n}.$$

De même, en développant le second membre de l'équation (34) suivant les puissances de η on obtient

$$\omega_1 \omega_2 \cdots \omega_n \sum (x+\Omega)^\nu e^{-\eta(x+\Omega)} = (-1)^\nu D_\eta^\nu \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{B_s^{(n)}(x)}{s!} \eta^{s-n}.$$

En substituant ces développements dans l'expression de $F_n(x;\eta)$ on trouvera

$$F_n(x;\eta) = (-1)^{\nu+n} D_\eta^\nu \sum_{s=n}^{\infty} (-1)^s \frac{B_s^{(n)}(x)}{s!} \eta^{s-n}.$$

La fonction $F_n(x;\eta)$ est donc holomorphe dans le point $\eta = 0$. Faisons tendre η vers zéro, il vient

$$\mathop{\mathrm{S}}_0^x x^\nu \mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} x = \frac{B_{\nu+n}^{(n)}(x \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+n)}.$$

En particulier, pour $\nu = 0$, on trouvera

$$\mathop{\mathrm{S}}_a^x \mathop{\overset{n}{\triangle}}_{\omega_1 \ldots \omega_n} x = \frac{B_n^{(n)}(x-a \mid \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)}{n!}.$$

UNIVERSITÉ DE COPENHAGUE.